

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail  
DIRECTION RECHERCHE ET INGENIERIE DE FORMATION

**RESUME THEORIQUE  
&  
GUIDE DE TRAVAUX PRATIQUES**

**MODULE 3 NOTIONS DE MATHÉMATIQUES  
APPLIQUÉES À L'INFORMATIQUE**

**SECTEUR : NTIC**

**SPECIALITE : TECHNIQUES DE RESEAUX INFORMATIQUES (TRI)**

**NIVEAU : TECHNICIEN SPECIALISE**

**OFFPPT**

*DOCUMENT ELABORE PAR :*

*NOM ET PRENOM :*

*EFP :*

*DR :*

*MORCHID OMAR IMAM*

*CFMOTI*

*DRGC*

## SOMMAIRE :

A.	Systèmes de numération.....	8
I-	Introduction :.....	8
1.	Aperçu historique :.....	8
2.	Exemples de systèmes de numération.....	9
II-	Des systèmes positionnels.....	10
1.	Qu'est ce qu'un système de numération ?.....	10
2.	Principe d'une base.....	10
3.	Les systèmes positionnels :.....	11
III-	L'unité de l'information et ses multiples :.....	12
IV-	Passage de la base décimal à une base quelconque :.....	12
VI-	Passage de la base binaire vers une base quelconque.....	13
1.	Passage de la base binaire vers le décimal :.....	13
2.	Passage de la base binaire vers l'octal:.....	13
3.	Passage de la base binaire vers l'octal:.....	13
VII-	L'arithmétique binaire :.....	14
1.	L'addition binaire :.....	14
2.	La multiplication.....	14
3.	La soustraction.....	14
4.	La division :.....	14
VIII-	Les nombres fractionnels :.....	15
1.	Codage avec virgule fixe :.....	15
2.	Représentation des nombres à virgule flottante.....	15
IX-	Représentation des nombres signés :.....	16
1.	Par leur valeur absolue et leur signe.....	16
2.	Représentation des nombres signés dans le code du complément restreint.....	16
3.	Représentation des nombres signés dans le code du complément vrai.....	17
X-	En résumer pour l'arithmétique binaire :.....	19
XI-	Représentation des nombres signés : Exemple sur un octet :.....	20
B.	Algèbre de Boole et logique combinatoire :.....	20
1.	George Boole :.....	20
2.	Variable booléenne :.....	20
3.	Fonctions logiques de base :.....	21
a.	Fonction OUI :.....	21
b.	Fonction NON :.....	21
d.	Fonction ET (AND) :.....	23
4.	Règles de simplification d'une fonction logique :.....	24
a.	Commutativité:.....	24
b.	Associativité :.....	24
c.	Distributivité :.....	24
d.	Autre règles de simplification :.....	24
5.	Théorème de MORGAN :.....	24
6.	Table de Karnaugh.....	24
a.	Principe.....	24
b.	Représentation d'un tableau de Karnaugh.....	25
c.	Tableau de Karnaugh à 3 variables :.....	26
d.	Tableau de Karnaugh à 4 variables :.....	26
e.	Ecriture dans le tableau de KARNAUGH.....	27

f.	Repérage de zones dans un tableau de Karnaugh.....	28
g.	Lecture d'une fonction dans un tableau de karnaugh .....	29
h.	Regroupement de cases dans un tableau de Karnaugh :.....	30
i.	Minimisation d'une fonction dans un tableau de Karnaugh .....	30
j.	Résumé :.....	32
k.	Cas particulier .....	32
C.	l'unité de mesure de l'information et ses multiples : .....	33
D.	Les différents codes binaires .....	33
1.	Définitions .....	33
2.	Code binaire pur .....	33
3.	Code binaire réfléchi ou code Gray .....	33
4.	Construction du code Gray :.....	33
5.	Les codes de caractères .....	34
6.	Le code ASCII.....	34
E.	Le dénombrement :.....	35
1.	Notation factorielle et propriétés :.....	35
a.	Définition .....	35
b.	Propriétés : .....	35
2.	Arrangements de r objets parmi n : .....	35
a.	Définition : .....	36
b.	Autre définition : .....	36
c.	Théorème :.....	36
3.	Combinaisons de r objets parmi n :.....	36
a.	Définition : .....	36
F.	La probabilité: .....	37
1.	Introduction :.....	37
2.	UNIVERS DES ÉVÉNEMENTS : .....	37
a.	Définitions :.....	37
b.	AXIOMES.....	38
3.	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES.....	40
G.	Résoudre des problèmes de probabilité et de statistique.....	43
1.	Notion de variables qualitatives. ....	43
2.	Notion de variables quantitatives. ....	44
3.	Représentation des variables qualitatives et quantitatives. ....	44
4.	Calcul des paramètres de tendance.....	45
a.	Paramètre de tendance centrale :.....	45
b.	Paramètres de dispersion :.....	45
	TRAVAUX DIRIGES.....	48

MODULE 3 : NOTIONS DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES A L'INFORMATIQUE

Code : TRI-03

Durée : 60 heures

OBJECTIF OPÉRATIONNEL

COMPÉTENCE

**Appliquer des notions de base en mathématiques et statistiques en informatique**

PRÉSENTATION

Ce module de compétence générale s'inscrit dans la première année du programme d'études et constitue un préalable pour l'enseignement des modules "Techniques de programmation structurée " et "Installation d'un poste informatique".

DESCRIPTION

L'objectif de ce module est l'étude des principaux concepts mathématiques utilisés en informatique, la modélisation basée sur ces concepts, la résolution de problèmes et l'analyse de situations concrètes à l'aide de méthodes statistiques tout en faisant preuve d'esprit critique dans le choix de ces dernières et lors de l'interprétation des résultats obtenus.

**CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT**

**STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT**

Prévoir des exposés de concepts théoriques sur le tableau en amenant le stagiaire à résoudre des problèmes appliqués en informatique et analyser des situations concrètes.  
Ensuite, des exercices seront proposés aux stagiaires pour consolider les concepts vus au cours.  
Pour chaque élément de compétence, des exercices porteront sur des situations concrètes.  
Enfin, les travaux réalisés à l'aide d'outils informatiques (tableur) seront en lien avec les notions vues dans les autres modules.

**ACTIVITES D'APPRENTISSAGE**

- Représenter des nombres sur l'ordinateur et effectuer des opérations arithmétiques et logiques dans différents types de représentation interne.
- Organiser et traiter de l'information.
- Résoudre des problèmes de dénombrement, de probabilité et de statistique.

**EVALUATION**

- Individuellement
- Travail effectué à partir :
  - de situations propres au domaine de l'informatique,
  - de consignes du formateur.
- Travail effectué à l'aide :
  - d'une station de travail et d'un tableur,
  - des manuels de référence techniques appropriés.

**MATERIEL ET EQUIPEMENT**

**Matériel :**

- Notes de cours
- Tableurs

**Équipement :**

- Un poste informatique

**REFERENCES**

## CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT

PRECISIONS ET PREALABLES	ÉLÉMENTS DE CONTENU
1. Définir un système de numération.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Définition de base d'un système de numération et rang d'un chiffre.</li> <li>• Représentation de nombres sous forme polynomiale.</li> </ul>
2. Définir les systèmes binaire, octal et hexadécimal.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Représentation d'un nombre dans la base binaire, octale ou hexadécimale.</li> </ul>
3. Définir l'unité de mesure de l'information et ses multiples.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Définition de l'unité de mesure de l'information en informatique (chiffre binaire ou bit).</li> <li>• Définition d'un mot binaire (octet).</li> <li>• Calcul des multiples de l'octet (Ko, Mo, Go ...) dans le système binaire (base 2).</li> </ul>
4. Définir les différents codes binaires (binaire naturel, ASCII ...).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Codage d'un nombre décimal en binaire naturel.</li> <li>• Codage d'un nombre décimal et binaire en Gray et vice versa.</li> <li>• Codage d'un nombre décimal en BCD et vice versa.</li> <li>• Définition du code ASCII.</li> </ul>
<b>A. Effectuer des traitements sur des données numériques.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convertir un nombre en différents systèmes de numération.</li> <li>• Calcul des opérations (+, -, x, /) directement dans le système binaire naturel.</li> <li>• Définition de l'organisation de la mémoire (mot mémoire, adressage).</li> <li>• Différents types de représentation des nombres sur l'ordinateur : signe et grandeur, par complémentation, par excès, nombres réels, notion de virgule flottante.</li> </ul>
<b>B. Effectuer des opérations logiques.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algèbre de Boole et les trois opérations logiques de base : Négation (NON), Intersection (ET) et union (OU).</li> <li>• Lois fondamentales de l'algèbre de Boole.</li> <li>• Variables logiques et valeurs de vérité.</li> <li>• Fonctions logiques, tables de vérité et simplification des fonctions.</li> </ul>
<b>C. Résoudre des problèmes de dénombrement.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Notation factorielle et propriétés.</li> <li>• Définition des arrangements de r objets parmi n.</li> <li>• Définition des combinaisons de r objets parmi n.</li> </ul>

PRÉCISIONS ET PRÉALABLES	ÉLÉMENTS DE CONTENU
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Théorème du nombre de sous-ensembles d'un ensemble de <math>n</math> objets distincts comme somme des combinaisons possibles.</li></ul>
5. Définir le concept de probabilité.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Définir la notion de probabilité.</li><li>• Donner les éléments d'un espace échantionnal.</li></ul>
6. Définir la notion de variable et de type de variable statistique.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Identifier le type de variable statistique associée à un contexte donné.</li></ul>
<b>D. Résoudre des problèmes de probabilité et de statistique.</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Notion de variables qualitatives.</li><li>• Notion de variables quantitatives.</li><li>• Représentation des variables qualitatives et quantitatives.</li><li>• Calcul des paramètres de tendance.</li><li>• Interprétation des paramètres de tendance.</li></ul>



## A. Systèmes de numération

## I- Introduction :

## 1. Aperçu historique :

L'arithmétique est l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres. La notion de nombres entiers nous est naturelle et leur écriture usuelle (0, 1, 2, ..., 2006, ...) nous est familière. Cependant, il a fallu des millénaires pour que se dégagent ces concepts.

L'origine des **nombres entiers** est lointaine. Par exemple, les bergers de l'Antiquité utilisaient des cailloux (« *calculus* » en latin) pour faire rentrer le soir *autant* de moutons qu'ils en avaient fait sortir le matin. Cailloux d'une part et moutons d'autre part forment des collections d'objets différents ayant autant d'éléments.

Ainsi, au fil du temps, à partir de collections concrètes d'objets présentant le même caractère quantitatif, s'est dégagé le concept de nombres entiers.

Ensuite, progressivement, ces entiers sont devenus des objets mathématiques abstraits, indépendants des objets comptés.

On a donné des **noms** à ces nombres (À noter cependant que, par exemple, les Aborigènes australiens n'ont pas de nom de nombre).

S'est posé aussi le problème de la notation des entiers naturels. Ils sont en nombre illimité : comment les écrire tous avec un minimum de signes (appelés chiffres) ? C'est le problème de la **numération**.

Viendront aussi les opérations élémentaires sur les nombres.

« Toutefois, une véritable arithmétique théorique (*arithmos* veut dire nombre en grec ancien), où les nombres sont conçus comme des objets mathématiques abstraits, indépendants de leur représentation écrite et des objets comptés, ne s'est constituée que progressivement ; chez les Babyloniens (17<sup>ème</sup> siècle av-JC), puis dans la mathématique grecque : nombres figurés, moyennes, suites chez les pythagoriciens, théorie du PGCD, nombres premiers et leur infinitude (à partir de 500 ans AV-JC)... Les mathématiciens arabes du *moyen âge* ont repris et développé presque tous les problèmes arithmétiques des grecs... » (D'après : *Mais au fil des âges -Gauthier-Villard, Paris-1987*).


C'est de l'Inde, que nous viennent les notations actuelles des nombres, transmises par les arabes, et, semble-t-il, le « zéro » (le mot français chiffre est une déformation du mot arabe *sifr* désignant zéro) :

« On attribue à Brahmagupta, au 7<sup>ème</sup> siècle, l'invention du zéro - en fait déjà à l'état latent dans les mathématiques indiennes de l'époque - liée à l'usage d'un système décimal positionnel que l'Occident adoptera, transmis par les Arabes ( Maures ) lors de leurs invasions en Andalousie

(sud de l'Espagne ). Brahmagupta énonce même la règle des signes relative à la multiplication. » (Source : [www.chronomath.com](http://www.chronomath.com)).

## 2. Exemples de systèmes de numération

### a- La numération Egyptienne :

Symboles							
Origines probables des symboles	un bâton	une anse de panier ou un cordon	un rouleau de papyrus ou une spirale	une fleur de lotus	doigt relevé et légèrement incliné	un lézard	un dieu agenouillé supportant le ciel
Valeurs	un	dix	cent	mille	dix mille	cent mille	un million

- Principe :

Le nombre correspondant est la somme des nombres représentés par les symboles. C'est une numération de type additif.


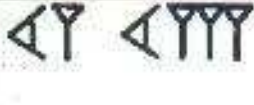

### b- L'écriture babylonienne :

- Pour les nombres compris entre 1 et 59 c'est une écriture additive qui n'utilise que deux symboles : un "clou" pour l'unité et un "chevron" pour la dizaine.



- Pour les nombres supérieurs à 59, l'écriture se fait par "paquets" séparés par un espace. Le premier paquet compte les unités, le second paquet compte le nombre de soixantaines, le troisième le nombre de soixantaines au carré, ... Pour chaque paquet le nombre, est compris entre 1 et 59.

- Par exemple :

Numérotation babylonienne			
Numérotation usuelle			

Remarque :

D'autres systèmes de numération ont été utilisés jadis. Voici du plus ancien au plus récent :

- Le système phénicien
- Le système grec

- Le système hébreu
- Le système romain
- Le système des mayas
- Le système des arabes de Bagdad

## II- Des systèmes positionnels

### 1. Qu'est ce qu'un système de numération ?

Sur le plan de la *représentation* des nombres, on s'est vite rendu compte de la difficulté :

- D'associer à chaque nombre un symbole : 0 1 2 .....etc. ou à l'inverse, de répéter un signe unique pour représenter un nombre I II III IIII IIIII .....
- De leur donner un nom : Ces obstacles ont obligé les diverses civilisations d'autrefois à combiner les nombres et les symboles pour désigner des nombres supérieurs

Exemple chez les Romains:       $XXIV = X + X + (V - I) = 24$

#### Règle :

Un petit chiffre précédant un plus grand que lui est soustrait en priorité, ensuite tout chiffre est additionné au suivant

#### Définition :

*Un système de numération est un ensemble de symboles et de règles permettant d'écrire et de nommer les nombres*

Pour des raisons d'économie de noms et de symboles, les systèmes les plus efficaces sont ceux qui reposent sur des REGROUPEMENTS en un certain nombre d'éléments, toujours le même. Ce nombre est appelé *BASE* de numération.

Les chiffres qui indiquent le nombre de différents groupements obtenus sont placés les uns à côté des autres dans un ordre bien précis

Ce mode de regroupement où chaque chiffre prend une valeur différente selon la place qu'il occupe s'appelle *SYSTEME DE NUMERATION DE POSITION*. Tous les systèmes de numération ne se valent pas. Il y en a de plus pratiques et de moins pratiques.

### 2. Principe d'une base

La base est le nombre qui sert à définir un système de numération. La base du système décimal est dix alors que celle du système octal est huit. Quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n} (b_i a^i) = b_n a^n + \dots + b_5 a^5 + b_4 a^4 + b_3 a^3 + b_2 a^2 + b_1 a^1 + b_0 a^0$$

Où :  $b_i$  : chiffre de la base de rang  $i$   
et :  $a^i$  : puissance de la base  $a$  d'exposant de rang  $i$

Exemple : base 10  $1986 = (1 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$

### 3. Les systèmes positionnels :

#### a. Le système décimal.

On appelle le système décimal (base 10) le système composé de 10 éléments à savoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Notre système de numération en base 10 repose sur deux mécanismes élémentaires :

- Le mécanisme de groupement veut dire que 10 unités d'un rang sont toujours regroupées en une unité du rang supérieur.
- Le mécanisme de position veut, lui, que ce soit la place d'un chiffre dans un nombre qui lui confère sa valeur.

NB : Le **rang** occupé par un chiffre dans la représentation d'un nombre naturel est la place, comptée à partir de la droite, occupée par ce chiffre dans la série des puissances successives de 10.

Exemple : 8352, le chiffre 5 occupe le second rang.

$$3027 = (3 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$$

#### b. Le système binaire :

C'est le système de numération en base deux. Il ne comprend que les chiffres 0 et 1 et indiquant l'absence ou la présence d'une unité à un **rang**.

Exemple :  $10111011 = (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$

#### c. Le système Octal :

On appelle le système octal (base 8) le système composé de 8 éléments à savoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

#### d. Le système Hexadécimal :

Il est aussi utilisé en informatique (code ASCII). Dans cette base, on utilise 16 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, et F. (le chiffre A représente 10 unités, le chiffre B représente 11 unités, ...)

**e. La base B :**

D'une manière générale, on appelle une base B tout ensemble composé de B éléments partant de 0 jusqu'à B-1

**Remarque :**

L'inconvénient d'une petite base, c'est un très grand nombre de regroupements, ce qui simplifie le système mais alourdit l'écriture.

Par exemple, 1110010110111 représente en base deux le nombre 7351. Par contre, une grande base nécessite un grand nombre de symboles (trente en base trente). La base dix l'a probablement emporté en raison du nombre de doigts des deux mains !

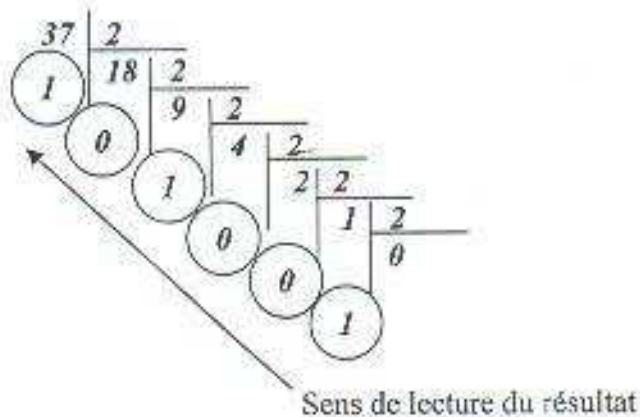
III- L'unité de l'information et ses multiples :

IV- Passage de la base décimale à une base quelconque :

Le passage de la base décimale vers n'importe quelle base s'effectue par la division successive de nombre par le numéro de la base correspondante. Le résultat se lit dans le sens inverse de la division.

**Exemple :**

Convertir en binaire le nombre décimal suivant 37 :



**Enfinement le résultat est :  $(37)_{10} = (100101)_2$**

La même méthode est suivie quelque soit la base de destination, il suffira de changer le dénominateur par l'indice de la base à savoir 8 pour la base octal et 16 pour l'hexadécimal.

## V- Passage d'une base quelconque vers la base décimale :

Le passage d'une base quelconque vers la base décimale se fait en écrivant la combinaison de nombre dans la base équivalente.

Exemple :

Convertir en décimal le nombre hexadécimal suivant A21 :

$$\begin{aligned}(A21)_{16} &= A * 16^2 + 2 * 16^1 + 1 * 16^0 = 10 * 16^2 + 2 * 16^1 + 1 * 16^0 \\ &= 2560 + 32 + 1 \\ &= (2593)_{10}\end{aligned}$$

## VI- Passage de la base binaire vers une base quelconque

## 1. Passage de la base binaire vers le décimal :

La passage de la base binaire vers la base décimal se fait en écrivant la combinaison de nombre dans la base équivalente :

Exemple :

Convertir en décimal le nombre binaire suivant 1001 :

$$(1001)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9$$

## 2. Passage de la base binaire vers l'octal:

Comme il y a un rapport de puissance entre la base binaire et l'octal ( $8 = 2^3$ ), il suffit de coder chaque nombre octal sur trois bits pour passer en binaire.

Exemple :

Convertir en octal le nombre binaire suivant 101001 :

$$(101001)_2 = \underbrace{101}_5 \underbrace{001}_1 = (51)_8$$

## 3. Passage de la base binaire vers l'octal:

Comme il y a un rapport de puissance entre la base binaire et l'hexadécimal ( $16 = 2^4$ ), il suffit de coder chaque nombre octal sur quatre bits pour passer en binaire.

Exemple :

Convertir en hexadécimal le nombre binaire suivant 10110011 :

$$(101001)_2 = \underbrace{1011}_B \underbrace{0011}_3 = (B3)_{16}$$

## VII- L'arithmétique binaire :

Les opérations arithmétiques binaires se déroulent de la même manière qu'en système décimal.

## 1. L'addition binaire :

Calculer  $10011 + 10100$  :

$$\begin{array}{r} 10011 \\ + 10100 \\ \hline 100111 \end{array}$$

## 2. La multiplication

Calculer  $111 * 101$  :

$$\begin{array}{r} 111 \\ * 101 \\ \hline 111 \\ + 000 \\ + 111 \\ \hline 100011 \end{array}$$

## 3. La soustraction

Calculer  $1101 - 1001$  :

$$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline 0010 \end{array}$$

## 4. La division :

Calculer  $11000 / 110$

$$\begin{array}{r|l} 11000 & 110 \\ 110 & 100 \\ \hline 0000 & \\ 0000 & \\ \hline 00000 & \\ 00000 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

*Finalement  $11000 / 110 = 100$*

## VIII- Les nombres fractionnels :

## 1. Codage avec virgule fixe :

Les nombres fractionnels sont codés de la même manière que les nombres entiers en utilisant les puissances négatives de la base.

Exemple :

Convertir en décimal le nombre binaire suivant 1001,101 :

$$(1001)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3}$$

$$= 8 + 0 + 0 + 1 + 0,5 + 0 + 0,125 = 9,625$$

## 2. Représentation des nombres à virgule flottante

Nous savons qu'il est nécessaire de stocker des données dans les machines. Ainsi le nombre 9,750 se trouvera mémorisé sous la forme suivante : 1001,11. Toutefois cette expression binaire ne suffit pas à définir totalement notre donnée car il n'y a aucune indication sur la valeur du poids binaire affecté aux différents bits. d'où la notion de virgule. En utilisant cette notion de virgule, notre nombre peut s'écrire de la manière suivante :

$$N = 1001,11 \times 2^0$$

$$N = 100,111 \times 2^1$$

$$N = 10,0111 \times 2^2$$

$$N = 1,00111 \times 2^3$$

$$N = 0,100111 \times 2^4$$

Cette dernière expression présente l'avantage de représenter la grandeur par un nombre inférieur à 1 multiplié par une puissance de 2. L'exposant 4 est bien entendu représentatif de la position de la virgule. Donc pour définir totalement notre information (9,750) il faudra dans ce système de représentation **deux termes** :

- le terme 100111 appelé MANTISSE
- le terme 100 appelé CARACTERISTIQUE

Si dans une machine les informations sont représentées en **virgule flottante**, elles se présenteront de la manière suivante :



Et elle sera égale à :  $N = 0,100111 \times 2^4$  donc  $N = 1001,11$



## IX- Représentation des nombres signés :

## 1. Par leur valeur absolue et leur signe

C'est naturellement la première représentation qui vient à l'esprit. Il suffit d'affecter un bit pour le signe et d'attribuer par convention la valeur 0 au signe + et la valeur 1 au signe -.

Ainsi le nombre +32 s'écrira dans le système binaire :

0	100000
signe	nombre

Et le nombre -32 :

1	100000
signe	nombre

## 2. Représentation des nombres signés dans le code du complément restreint

Nous allons d'abord définir ce qu'est le complément restreint. Pour cela il faut tenir compte du format de la donnée et de la base dans laquelle elle est exprimée.

Exemples :

Soit l'information  $(453)_{10}$  ; son format est de 3 caractères et la base utilisée est 10. La valeur maximale que l'on peut exprimer dans ce format est : 999. La différence qui existe entre cette valeur maximale et 453 s'appelle le **complément restreint**.

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 453 \\ \hline 546 \end{array}$$

On le nomme aussi **complément à 9** car la base utilisée est 10. Cette notion de complément restreint se retrouve avec n'importe quelle base utilisée et plus particulièrement en binaire :

Complément restreint de  $(1001)_2$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 1001 \\ \hline 0110 \end{array}$$

Complément restreint de  $(F0A8)_{16}$

$$\begin{array}{r} \text{FFFF} \\ - \text{FDAB} \\ \hline \text{0F57} \end{array}$$

Si nous reprenons l'exemple du binaire, il n'est même pas nécessaire d'exécuter une opération de soustraction pour obtenir ce complément restreint on s'aperçoit qu'il suffit de transformer tous les 1 en 0 et vice versa pour l'obtenir.

$(100110)_2$  à pour complément restreint :  $011001$ . Certaines machines utilisent ce code pour la représentation des nombres signés. Il est alors appelé code du complément à 1.

Ainsi le nombre + 25 sera représenté de la manière suivante :

0	11001
signe	valeur

Et - 25 :

1	00110
signe	CR de 25

### *CR = Complément Restreint*

#### 3. Représentation des nombres signés dans le code du complément vrai

Comme pour le complément restreint, nous allons définir ce qu'est le complément vrai d'un nombre. Le complément vrai d'un nombre est la valeur qu'il faut ajouter à ce nombre pour obtenir la valeur maximale + 1 que l'on peut exprimer (en tenant compte du format et de la base utilisés).

#### Exemples :

Calcul du complément vrai de  $(453)_{10}$

Valeur maximale  $\implies 999$

Valeur maximale + 1  $\implies 1\ 000$

Complément vrai :

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 453 \\ \hline 547 \end{array}$$

Calcul du complément vrai de  $(8AF)_{16}$

Valeur maximale  $\implies \text{FFF}$

Valeur maximale + 1  $\implies 1\ 000$

Complément vrai :

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 8AF \\ \hline (751)_{16} \end{array}$$

On peut aussi obtenir le complément vrai d'un nombre en calculant d'abord son complément restreint et en ajoutant ensuite 1.

Exemples :

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 453 \\ \hline 546 \\ + 1 \\ \hline 547 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{complément restreint} \\ \Rightarrow \text{complément vrai} \end{array}$$

Un exemple en binaire :

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 1001 \\ \hline 0110 \\ + 1 \\ \hline 0111 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{complément restreint} \\ \Rightarrow \text{complément vrai} \end{array}$$

Restons en binaire (base 2) et appliquons une autre méthode pour traduire un nombre en **complément à 2**. (Le complément vrai est également appelé complément à 2)

On part du bit de poids le plus faible (bit de droite) :

⇒ si c'est un zéro, on recopie 0 jusqu'au premier 1 rencontré,

⇒ si c'est un "1", on garde ce premier 1.

Ensuite on inverse tous les bits après le premier 1 rencontré à partir de la droite.

**NB :** Attention si le bit le plus à droite est un 1, c'est aussi le premier 1 rencontré !

Exemple :

$$(42)_{10} = (101010)_2 \Rightarrow \text{le bit le plus à droite est un 0}$$

0 ⇒ 0 on conserve le zéro

1 ⇒ 1 premier 1 rencontré est conservé

0 ⇒ 1 inversion des bits après le premier 1 rencontré

1 ⇒ 0

0 ⇒ 1

1 ⇒ 0

Le nombre  $(42)_{10} = (101010)_2$  s'écrit en complément vrai : 010110

En utilisant la méthode du complément restreint + 1 :

Valeur de départ	101010	$(42)_{10}$
Calcul complément restreint	$\Rightarrow$ 010101	on inverse tous les bits
	+ 1	on ajoute 1
Soit un complément vrai	$\Rightarrow$ 010110	

Un autre exemple :

$(59)_{10} = (111011)_2 \implies$  le bit le plus à droite est un 1

1  $\implies$  1 premier 1 rencontré est conservé

1  $\implies$  0 inversion des bits après le premier 1 rencontré

0  $\implies$  1

1  $\implies$  0

1  $\implies$  0

1  $\implies$  0

Le nombre  $(59)_{10} = (111011)_2$  s'écrit en complément vrai : 000101

En utilisant la méthode du complément restreint + 1 :

Valeur de départ	111011	$(59)_{10}$
Calcul complément restreint	$\Rightarrow$ 000100	on inverse tous les bits
	+ 1	on ajoute 1
Soit un complément vrai	$\Rightarrow$ 000101	

**Complément vrai = complément restreint + 1**

X- En résumer pour l'arithmétique binaire :

Lorsque l'on veut représenter un nombre avec son signe (nombre signé) la solution la plus simple consiste à rajouter un bit sur la gauche de la valeur absolue de ce nombre. Par convention ce bit sera à 0 pour représenter un nombre positif et à 1 pour représenter un nombre négatif.

0 1 1 0 signifie + 110  $\implies$   $(+6)_{10}$

1 1 1 0 signifie - 110  $\implies$   $(-6)_{10}$

Ce système intéressant par sa simplicité a pour inconvénient de présenter deux zéros.

0000  $\implies$  + 0

1000  $\implies$  - 0

Pour faciliter le travail des machines informatiques et pour des circuits électroniques simplifiés on représente un nombre signé en complément à 1 (complément restreint) ou en complément à 2 (complément vrai = complément restreint + 1). La représentation en complément à 2 (la plus répandue) a pour avantage de ne présenter qu'un seul zéro. Le bit le plus à gauche sera représentatif du signe :

0 pour un nombre positif  
1 pour un nombre négatif.

Le tableau suivant donne un aperçu des différentes représentations pour un nombre compris entre - 128 et + 127.

XI- Représentation des nombres signés : Exemple sur un octet :

2 <sup>7</sup> 2 <sup>6</sup> 2 <sup>5</sup> 2 <sup>4</sup> 2 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> 2 <sup>1</sup> 2 <sup>0</sup>								S	valeur absolue	S	complément à 1	S	complément à 2
1	1	1	1	1	1	1	1	-	127	-	0	-	1
1	1	1	1	1	1	1	0	-	126	-	1	-	2
1	1	1	1	1	0	1	1	-	125	-	2	-	3
-----													
1	0	0	0	0	0	0	1	-	1	-	126	-	127
1	0	0	0	0	0	0	0	-	0	-	127	-	128
-----													
0	1	1	1	1	1	1	1	+	127	+	127	+	127
0	1	1	1	1	1	1	0	+	126	+	126	+	126
-----													
0	0	0	0	0	0	0	1	+	1	+	1	+	1
0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	+	0	+	0
-----													
Positivité de représentation								de -127 à +127	de -127 à +127	de -128 à +127			

B. Algèbre de Boole et logique combinatoire :

1. George Boole :

George Boole, mathématicien, logicien et un peu philosophe est né le 2 novembre 1815 à Lincoln, dans le Lincolnshire (Angleterre). C'est le père fondateur de la logique moderne. En 1854 il réussit là où Leibniz avait échoué : allier en un même langage mathématiques et symbolisme.

Le but : traduire des idées et des concepts en équations, leur appliquer certaines lois et retraduire le résultat en termes logiques. Pour cela, il crée une algèbre binaire n'acceptant que deux valeurs numériques : 0 et 1. L'algèbre booléenne ou algèbre de BOOLE était née. Les travaux théoriques de Boole, trouveront des applications primordiales dans des domaines aussi divers que les systèmes informatiques, les circuits électriques et téléphoniques, l'automatisme...

2. Variable booléenne :

La variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 valeurs qui sont repérées habituellement 0 ou 1. Cette variable binaire se note par une lettre comme en algèbre.

Exemple : a b x

Physiquement, cette variable peut correspondre à l'un des dispositifs cités ci-dessus dont les 2 états représentent les 2 valeurs possibles que peut prendre cette variable. D'une façon générale, ces 2 états sont repérés H et L et on attribue :

- à l'état H (high) la valeur 1
- à l'état L (low) la valeur 0

On trouvera parfois cette notation du zéro :  $\emptyset$  pour éviter la confusion avec la lettre O. La variable binaire est aussi appelée variable booléenne.

### 3. Fonctions logiques de base :

Une fonction logique est le résultat de la combinaison (logique combinatoire) d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations mathématiques BOOLEENNES bien définies : la valeur résultante de cette fonction dépend de la valeur des variables logiques, mais de toute façon cette résultante ne peut être que 0 ou 1. Une fonction logique possède donc une ou des variables logiques d'entrée et une variable logique de sortie. Cette fonction logique se note par une lettre comme en algèbre.

#### a. Fonction OUI :

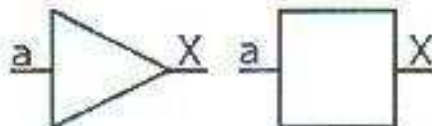
Cette fonction est obtenue avec une seule variable. La valeur de la fonction est toujours identique à la valeur de la variable.

*Nous l'écrivons :  $X = a$*

- **Table de vérité :**

a	X
0	0
1	1

- **Ancienne symbolisation / Symbolisation actuelle :**



- **Forme canonique :**

$$X = a$$

#### b. Fonction NON :

La fonction NON est obtenue avec une seule variable. La valeur de la fonction est toujours la valeur inverse (complémentaire) de celle de la variable.

*Nous l'écrivons :  $X = \bar{a}$  et nous lisons : X égale a barre.*

Cette fonction est aussi appelée :

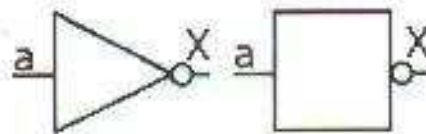
- Fonction Inversion,
- Fonction complémententation.

Nous disons également que a est la valeur complémentaire de a et x la valeur complémentaire de x.

- **Table de vérité :**

a	X
0	1
1	0

- **Symbolisation :**



- **Forme canonique :**

$$X = \bar{a}$$

- c. **Fonction OU (OR) :**

On obtient la fonction OU avec un minimum de deux variables. La fonction X prend la valeur 1 quand l'une ou l'autre ou les 2 variables sont à 1. Nous l'écrivons :  $X = a + b \implies$  addition ou somme logique (Ou encore :  $X = a \vee b \implies$  disjonction : a ou b (ou les deux))

*Nous lisons X égale a ou b.*

- **Table de vérité :**

b	a	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Propriétés particulières :

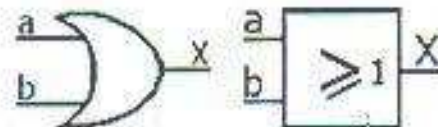
$$a + 1 = 1$$

$$a + 0 = a$$

$$a + a = a$$

$$a + a = 1$$

- Symbolisation :



- Forme canonique

$$X = a + b$$

#### d. Fonction ET (AND) :

Cette fonction est obtenue avec au moins deux variables. La fonction X prend la valeur 1 quand l'une et l'autre variable sont à 1. Nous l'écrivons :  $X = a \cdot b \implies$  produit logique (Ou encore :  $X = a \wedge b \implies$  conjonction : a et b).

*Nous lisons X égale a et b.*

- Table de vérité

b	a	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Propriétés particulières

$$a \cdot 1 = a$$

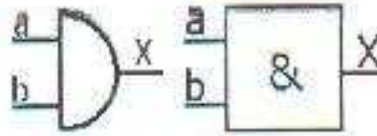
$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot a = a$$

$$a \cdot a = 0$$



- Symbolisation :



- Forme canonique :

$$X = a . b$$

#### 4. Règles de simplification d'une fonction logique :

##### a. Commutativité :

- Somme logique :  $X = a + b = b + a$
- Produit logique :  $X = a . b = b . a$

##### b. Associativité :

- Somme logique :  $X = a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
- Produit logique :  $X = a . b . c = (a . b) . c = a . (b . c)$

##### c. Distributivité :

- Produit logique :  $X = a . (b + c) = a . b + a . c$
- Somme logique :  $X = a + (b . c) = (a + b) . (a + c)$

##### d. Autre règles de simplification :

#### 5. Théorème de MORGAN :

Le théorème de MORGAN s'exprime par les deux relations :

$$\overline{a + b} = \overline{a} . \overline{b}$$

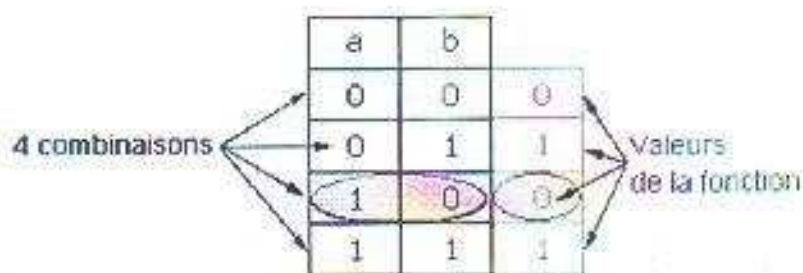
$$\overline{a . b} = \overline{a} + \overline{b}$$

#### 6. Table de Karnaugh

##### a. Principe

Nous avons vu que les règles de l'algèbre de Boole permettent de simplifier les fonctions, cette méthode est cependant relativement lourde et ne permet jamais de savoir si l'on aboutit à une expression minimale de la fonction ou pas.

Nous pourrions utiliser la méthode du tableau de Karnaugh. Dans le cas de deux variables binaires, nous avons quatre possibilités (ou combinaisons) à envisager que nous traduisons sous la forme de la table de vérité suivante :



A chaque combinaison des variables est associée une valeur de la fonction. L'idée de *KARNAUGH* est d'associer une surface à chaque combinaison des variables, en adoptant la représentation suivante :

		0	a	1
b	0	①	②	
	1	③	④	

Nous disposons donc de 4 cases correspondant aux 4 combinaisons de variables.

La case 1 correspond à la combinaison  $a = 0 \quad b = 0 \Rightarrow (a, b)$

La case 2 correspond à la combinaison  $a = 1 \quad b = 0 \Rightarrow (a, b)$

La case 3 correspond à la combinaison  $a = 0 \quad b = 1 \Rightarrow (a, b)$

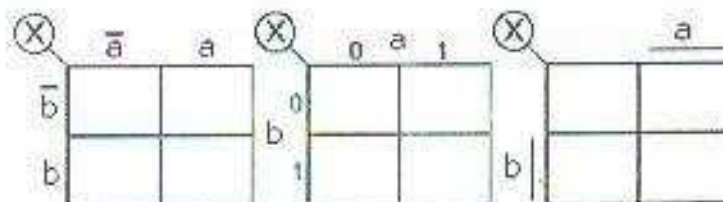
La case 4 correspond à la combinaison  $a = 1 \quad b = 1 \Rightarrow (a, b)$

Dans chacune de ces cases sera inscrite la valeur de la fonction pour la combinaison de variables correspondant à cette case. En suivant l'exemple déjà représenté ci-dessus nous avons :

case n° 2  $\Rightarrow$  combinaison de variables  $a = 1$  et  $b = 0 \Rightarrow$  valeur de la fonction = 0.

### b. Représentation d'un tableau de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh peut se représenter sous les formes suivantes :



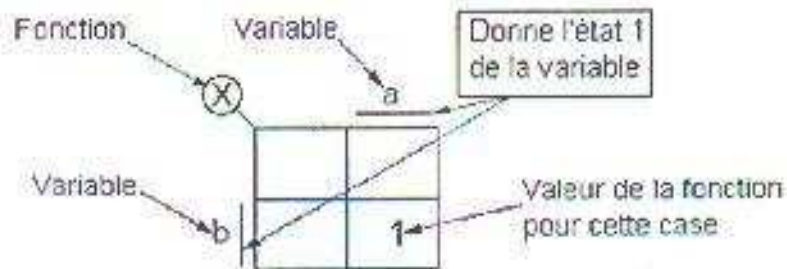
Ces trois représentations sont équivalentes.

Un tableau de Karnaugh nous renseigne donc sur les données suivantes :

- Le nom de la fonction (par ex :  $X$ )
- Le nom des variables ( $a, b$ )
- L'état des variables : 0, 1 ou une barre représentant l'état 1
- La valeur de la fonction (1 ou 0)

Nous notons que :

- Dans la case 1 les variables valent toutes 0.
- Si l'on adopte la notation algébrique booléenne pour les variables, elle nous renseigne du nom et de l'état de la variable ( $a ; \bar{a}$ ).



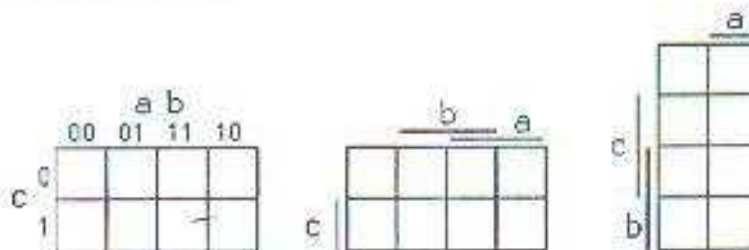
### c. Tableau de Karnaugh à 3 variables :

A chaque case est associé un triplet des valeurs  $a, b, c$ .

Exemple : La case n° 1 représentera le triplet  $\{0,0,0\}$  ou  $a = 0, b = 0$  et  $c = 0$ .

Nous pouvons dire également que la case n°1 correspond au produit  $(a \cdot b \cdot c)$ .

Dans ce cas la représentation devient :



### d. Tableau de Karnaugh à 4 variables :

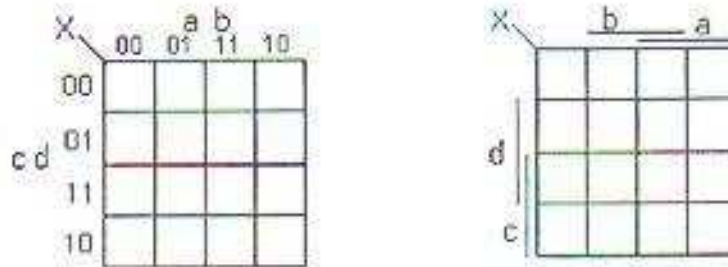
A chaque case est associé un quadruplet des valeurs  $a, b, c, d$ .

Exemples :

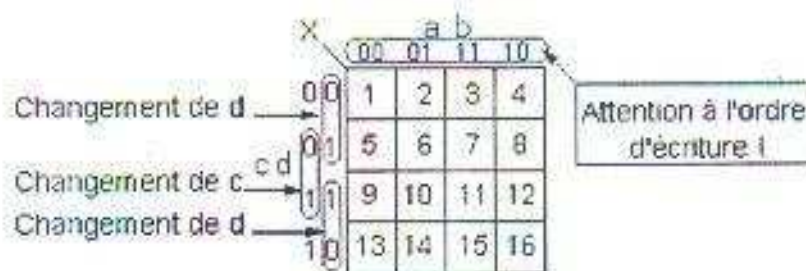
La case n° 4 représentera le quadruplet  $\{1,0,0,0\}$  ou  $a = 1, b = 0, c = 0$  et  $d = 0$  ( $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ).

La case n° 11 représentera le quadruplet  $\{1,1,1,1\}$  ou  $a = 1, b = 1, c = 1$  et  $d = 1$  ( $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ).

La case n° 16 représentera le quadruplet  $\{1,0,1,0\}$  ou  $a = 1, b = 0, c = 1$  et  $d = 0$  ( $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ).



Dans chaque cas, l'ordre d'écriture des états des variables fait qu'entre deux cases voisines (en ligne ou en colonne) une seule variable change d'état ; on dit de telles cases qu'elles sont adjacentes.



La case 2 correspond à  $a = 0 ; b = 1 ; c = 0 ; d = 0$

La case 3 correspond à  $a = 1 ; b = 1 ; c = 0 ; d = 0$

Lorsque nous passons de 2 à 3, seule la variable "a" change d'état : 2 et 3 sont **adjacentes**.  
Lorsque nous passons de 2 à 1, seule la variable "b" change d'état : 2 et 1 sont adjacentes.  
Lorsque nous passons de 2 à 6, seule la variable "d" change d'état : 2 et 6 sont adjacentes.  
Enfin, lorsque nous passons de 2 à 14, seule la variable "c" change d'état : 2 et 14 sont adjacentes.

Nous venons de déterminer les adjacences de la case n° 2.

e. Écriture dans le tableau de KARNAUGH

Supposons que l'étude d'un dispositif nous ait conduit à la table de vérité suivante :

a	b	c	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Le dispositif Z doit fonctionner :

si les 3 variables a, b et c sont simultanément à l'état 0 (fonction ET  $\Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ ).

OU si a = 0, b = 1, c = 1 simultanément (fonction ET  $\Rightarrow \bar{a} \cdot b \cdot c$ )

OU si a = 1, b = 0, c = 0 simultanément (fonction ET  $\Rightarrow a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ )

Ce que nous traduisons par l'équation :

$$Z = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Dans le tableau de Karnaugh, nous mettrons un "1" dans chacune des cases correspondant aux termes  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ ;  $\bar{a} \cdot b \cdot c$  et  $a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ .

Nous placerons un "0" dans les cases correspondant aux autres termes.

Z		<u>b</u>		<u>a</u>
		1	0	0
c	0	1	0	0
	1	0	1	1

Il est important de remarquer que la table de vérité, l'écriture algébrique d'une fonction et le tableau de Karnaugh ne sont que des formes d'écriture différentes du même phénomène.

#### f. Repérage de zones dans un tableau de Karnaugh

Soit à transcrire l'équation logique suivante :

$$X = a \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{d} \cdot a + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{b}$$

Nous devons écrire un "1" dans toutes les cases qui vérifient chaque terme de l'équation X.

Le 1er terme est vrai dans les cases n°15 et 16 (en rouge)

Le 2ème terme est vrai dans les cases n°9, 12, 13 et 16 (en bleu)

Le 3ème terme est vrai dans les cases n°5 (en noir)

Le 4ème terme est vrai dans les cases n°1, 2, 3, 4, 13, 14, 15 et 16 (en vert)

X		<u>d</u>		<u>c</u>	1	2	3	4
		1	1	1				
b	1				5	6	7	8
	1			1	9	10	11	12
a	1	1	1	1	13	14	15	16
	0	0	0	0				

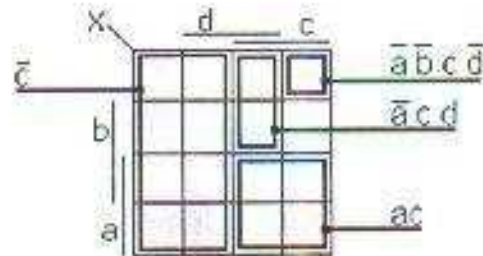
Diagram illustrating the Karnaugh map for X with highlighted regions and their corresponding algebraic terms:

- Region 1 (Red):  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$
- Region 2 (Blue):  $\bar{d} \cdot a$
- Region 3 (Black):  $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$
- Region 4 (Green):  $\bar{b}$

Dans la pratique nous remplissons une seule fois les cases.

Nous pouvons observer les faits suivants :

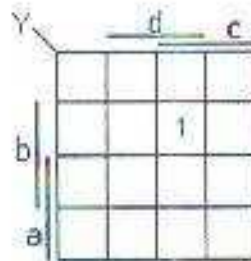
- Quand un terme ne contient qu'une variable il occupe une zone de 8 cases
- Quand un terme est un produit de 2 variables il occupe une zone de 4 cases
- Quand un terme est un produit de 3 variables il occupe une zone de 2 cases
- Quand un terme est un produit de 4 variables il occupe une zone d'1 cases



**g. Lecture d'une fonction dans un tableau de karnaugh**

La lecture d'une fonction dans un tableau de karnaugh est le problème inverse du paragraphe précédent (voir Écriture dans un tableau de Karnaugh). Nous pouvons lire successivement chacune des cases (fonction ET) et les lier par des fonctions OU.

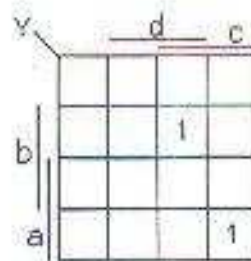
**Exemple 1 :**



Dans l'exemple 1 nous lisons que Y est égale à a ET b ET c ET d, et nous écrivons :

$$Y = a . b . c . d$$

**Exemple 2 :**



Dans l'exemple 2 nous lisons que Y est égale à a ET b ET c ET d OU a ET b ET C ET d et nous écrivons  $Y = a . b . c . d + a . b . c . d$

**h. Regroupement de cases dans un tableau de Karnaugh :**

Soit le tableau de la fonction Y suivante :

		d	c
Y			
b		1	
a	1		
	1		1

Nous pouvons écrire :

$$Y = \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d}$$

En fait, nous pouvons simplifier cette expression en remarquant que :

$$1^{\circ} a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} = a \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot (b + \bar{b}) = a \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$$

2° Ces deux termes correspondent à 2 cases adjacentes (cases 9 et 13).

3° Nous aurions pu lire directement dans le tableau de Karnaugh :

		d	c
Y			
b		1	
a	1		
	1		1

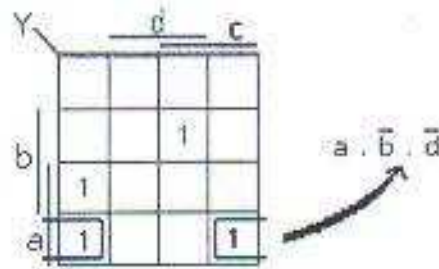
$a \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$

Notre expression est maintenant sous la forme :

$$Y = \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d}$$

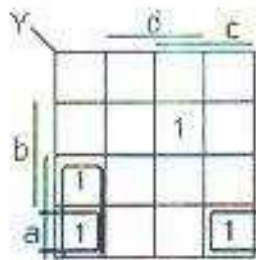
**i. Minimisation d'une fonction dans un tableau de Karnaugh**

En continuant notre observation nous pouvons remarquer également que la fonction vaut "1" dans deux autres cases adjacentes, ce qui nous aurait conduit à l'expression :



$$Y = \bar{a} . b . c . d + a . b . \bar{c} . \bar{d} + a . \bar{b} . \bar{d}$$

Mais l'expression la plus simple sera obtenue en regroupant les cases comme indiqué :

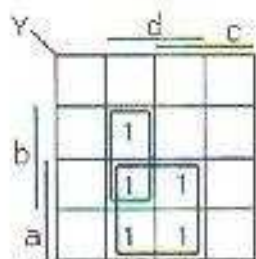


Ce qui correspond à la manipulation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} Y &= a . b . \bar{c} . \bar{d} + a . \bar{b} . \bar{c} . \bar{d} + a . \bar{b} . c . \bar{d} + \bar{a} . b . c . d \\ &= \underbrace{a . b . \bar{c} . \bar{d} + a . \bar{b} . \bar{c} . \bar{d}} + \underbrace{a . \bar{b} . c . \bar{d} + a . \bar{b} . c . \bar{d}} + \bar{a} . b . c . d \\ &= a . \bar{c} . \bar{d} + a . \bar{b} . \bar{d} + \bar{a} . b . c . d \end{aligned}$$

Ce qui donne l'expression la plus simple que l'on puisse obtenir. Nous avons minimiser l'équation de la fonction Y. En regroupant les cases adjacentes par deux, on supprime une variable des termes correspondants ; une manipulation algébrique simple montre que pour supprimer deux variables, il faut disposer de 4 cases adjacentes, pour en supprimer 3 il faut 8 cases adjacentes, etc...

Exemple :



$$Y = a . d + b . c . d$$



Autre exemple :

	d		c
Y	1		1
b			
a	1		1

$$Y = b \cdot d$$

**j. Résumé :**

La méthode de lecture des fonctions dans un tableau de Karnaugh consiste donc à regrouper les cases adjacentes par  $2^n$ , n étant le plus grand possible. On essaie de regrouper toutes les cases de cette manière, les chevauchements de groupes étant permis.

Une zone de 8 cases définira une variable.

Une zone de 4 cases définira un produit de 2 variables.

Une zone de 2 cases définira un produit de 3 variables.

Une zone d'1 cases définira un produit de 4 variables.

On lit enfin la fonction, en ne conservant pour chaque association que les variables qui ne changent pas d'état.

**k. Cas particulier**

Il arrive parfois qu'une fonction soit indéterminée pour certaines combinaisons des variables, pour différentes raisons ; la plus courante est que certaines combinaisons des variables étant impossibles, on ne juge pas utile de donner une valeur particulière à la fonction pour ces combinaisons là. Dans les cases correspondantes du tableau de Karnaugh, on placera un signe particulier  $(\Phi)$ .

Lors du regroupement des cases nous transformons le  $\Phi$  en 0 ou en 1 suivant la convenance, suivant les simplifications qui peuvent en découler.

Exemple :

	b		a	
Z	0 <sub>1</sub>	$\Phi$ <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>4</sub>
c	1 <sub>5</sub>	$\Phi$ <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>

On obtient ici l'expression la plus simple de F en transformant le  $\Phi$  de la case 6 en "1", ce qui permet de regrouper les cases 5, 6, 7, 8 et en transformant le  $\Phi$  de la case 2 en "0".

Nous aurons donc :  $Z = c$

## C. L'unité de mesure de l'information et ses multiples :

Unité de mesure en informatique désignant la quantité élémentaire d'information représentée par un chiffre du système binaire. On en doit l'invention à John W. Tukey et la popularisation à Claude Shannon.

Dans le cadre de la théorie de l'information proposée par Shannon, lorsque l'on reçoit l'information correspondant à un événement ayant 1 chance sur 2 de se produire, on reçoit un bit d'information. Par exemple, lors du tir à pile ou face de l'engagement d'un match de football, quand l'arbitre indique que la pièce est tombée sur pile, il donne un bit d'information aux 2 capitaines des équipes en compétition.

D'une manière générale, les multiples du bit sont les produits de 1024. On cite :

- 1 octet (byte en anglais) : 1 octet (1B) = 8 bits
- 1 Kilobit: 1 Kb = 1024 bits
- 1 Megabits: 1 Mb = 1024 Kb = 1024\*1024 bits
- 1 Gigabit: 1 Gb = 1024 Mb = 1024\*1024 Kb = 1024\*1024\*1024 bits

## D. Les différents codes binaires

## 1. Définitions

**Le codage** est l'opération qui transforme une information (écriture décimale, position angulaire, vitesse...) en écriture binaire dans un code de notre choix.

**Un code** est un langage composé de différents symboles ou mots.

**Un mot** est un ensemble de caractères numériques ou alphanumériques.

**Le transcodage** est le passage d'un code à un autre.

## 2. Code binaire pur

Ce code correspond au système de numération binaire et fait référence au code binaire naturel. Les caractères sont des bits, les mots sont formés par une association ou combinaison de bits et avec n bits nous pouvons former au maximum  $2^n$  mots.

## 3. Code binaire réfléchi ou code Gray

Le code Gray est un code construit de telle façon qu'à partir du chiffre 0 chaque nombre consécutif diffère du précédent immédiat d'un seul digit. En l'exprimant autrement nous pouvons également dire que l'on change un seul bit à la fois quand un nombre est augmenté d'une unité. De plus, on opère de telle manière que le digit de transformation soit d'un poids faible. Si une erreur survient lors d'une transformation d'un nombre à un autre elle est ainsi minimisée.

## 4. Construction du code Gray :

Commençons par un exemple simple et établissons le code gray pour les 4 premiers chiffres décimaux 0 à 3. Deux bits suffisent et les combinaisons en binaire BCD sont les suivantes :

0	00	
1	01	
2	10	: ici nous avons inversé la valeur de 2 bits à la fois
3	11	

Nous remarquons que pour aller du nombre  $(1)_{10}$  à  $(2)_{10}$  nous changeons les deux bits à la fois pour passer de  $(01)_2$  à  $(10)_2$ .

En code Gray, pour passer d'une ligne à la suivante, on inverse un seul bit de telle manière qu'il soit le bit le plus à droite possible conduisant à un nouveau nombre. Ce qui donne les combinaisons suivantes :

0	00	: on commence à zéro,
1	01	} on inverse un seul bit le plus à droite possible conduisant à un nouveau nombre.
2	11	
3	10	

## 5. Les codes de caractères

Afin de pouvoir transmettre ou stocker tous les types de caractères alphanumériques ou autres, des codes conventionnels ont été établis. Chaque caractère est associé à son équivalent en code numérique. Il existe de nombreux codes et nous pouvons citer pour mémoire le code ASCII, l'EBCDIC, l'UNICODE, l'UTF8...

## 6. Le code ASCII

Avec l'avènement des machines de traitement de l'information (téléscripteur, telex, ordinateur...) le code ASCII (American Standard Code for Information Interchange) est adopté comme standard dans les années 60. Le code ASCII de base représentait les caractères sur 7 bits (c'est-à-dire 128 caractères possibles, de 0 à 127). Le huitième bit est un bit de parité.

### Exemple :

En écrivant GRAY en ASCII nous obtenons :

4	7	5	2	4	1	5	9
<u>100</u>	<u>0111</u>	<u>101</u>	<u>0010</u>	<u>100</u>	<u>0001</u>	<u>101</u>	<u>1001</u>
G	R	A	Y				

Avec la parité paire le résultat est le suivant :

<u>1100</u>	<u>0111</u>	<u>0101</u>	<u>0010</u>	<u>1100</u>	<u>0001</u>	<u>0101</u>	<u>1001</u>
G	R	A	Y				

## E. Le dénombrement :

## 1. Notation factorielle et propriétés :

En mathématiques, la factorielle d'un entier naturel  $n$ , notée  $n!$ , ce qui se lit soit « factorielle de  $n$  » soit « factorielle  $n$  », est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à  $n$ .

La factorielle joue un rôle important en algèbre combinatoire parce qu'il y a  $n!$  façons différentes de permuter  $n$  objets. Elle apparaît dans de nombreuses formules en mathématiques, comme par exemple la formule du binôme et la formule de Taylor.

a. Définition

Soit  $n$  un entier naturel. Sa factorielle est formellement définie par :

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Par exemple :

- $1! = 1$
- $2! = 1 \times 2 = 2$
- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$

Par convention :  $0! = 1$ 

La définition de la factorielle sous forme de produit rend naturelle cette convention puisque  $0!$  est un produit vide, c'est-à-dire réduit à l'élément neutre de la multiplication.

b. Propriétés :

La notion de la factorielle jouie de toutes les propriétés de la multiplication usuelle (distributivité, commutativité...). En plus, la factorielle obéit aux deux lois suivantes :

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

2. Arrangements de  $r$  objets parmi  $n$  :

En mathématiques, lorsque nous choisissons  $k$  objets parmi  $n$  objets discernables et que l'ordre dans lequel les objets sont sélectionnés revêt une importance, nous pouvons les représenter par un  $k$ -uplet d'éléments distincts.

Exemple :

A un examen, cinq candidats tirent les uns après les autres un sujet dans une urne contenant des questions toutes différentes. Le premier tirage se fera sur un ensemble de 50 questions possibles. A chaque tirage suivant, la question qui vient d'être tirée est enlevée de l'urne. Ainsi, s'il on faisait passer 5 élèves, le tirage se ferait sur 50, puis sur 49, et ainsi de suite jusqu'à 46 qui représente l'ensemble des questions restantes dans l'urne pour le dernier tirage. L'arrangement va consister à additionner à chaque modification de cet ensemble de départ la nouvelle probabilité de piocher une question donnée. La solution pour cet exemple est donc un arrangement de 5 (k) à 50 (n). Si on remettait la question tirée de nouveau dans l'urne à chaque tirage, il s'agirait alors d'une combinaison.

**a. Définition :**

Soient E un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel. Un k-arrangement sans répétition de E est une application injective de  $\{1, 2, \dots, k\}$  dans E.

**b. Autre définition :**

Soient E un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel. Un k-arrangement de E (ou k-arrangement sans répétition de E, ou encore arrangement sans répétition de n éléments pris k à k) est un k-uplet  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  d'éléments de E tel que  $a_i \neq a_j$  qqsoit  $i, j \in [1, k]$  avec  $i \neq j$ . Un tel k-uplet est aussi appelé k-liste distincte d'éléments de E.

**c. Théorème :**

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. L'ensemble  $\mathcal{I}(F, E)$  des applications injectives de F dans E est fini et son cardinal est égal à  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  si  $k \leq n$  et 0 sinon. Ce cardinal se note  $A_n^k$  et se lit « Ank ». On dit aussi qu'on a un arrangement de k à n.

**Remarque :**

Construire un arrangement revient à placer les uns après les autres, k objets discernables pris parmi n, dans k cases numérotées et donc une permutation de n éléments est un n-arrangement de n éléments. La notion d'arrangement généralise donc celle de permutation.

3. Combinaisons de r objets parmi n :

**a. Définition :**

Une combinaison de r objets parmi n objets différents est un sous-ensemble non ordonné de r objets choisis parmi les n objets. On a la formule :

$$\binom{n}{r} = {}_n C_r = \frac{1}{r!} \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## F. La probabilité:

## 1. Introduction :

Le calcul des probabilités s'occupe des phénomènes aléatoires (dits plus esthétiquement: "processus stochastiques"), c'est-à-dire de phénomènes qui ne mènent pas toujours à la même issue et qui peuvent être étudiés grâce aux nombres et à leurs conséquences et apparitions. Néanmoins, même si ces phénomènes ont des issues variées, dépendant du hasard, nous observons cependant une certaine régularité statistique. Le jet d'un dé, le tirage du Loto pourraient être analysés par les lois de la mécanique, mais ce serait trop compliqué et même impossible car il faudrait parfaitement connaître les conditions initiales ce qui comme vous pouvez le voir dans le chapitre de physique quantique ondulatoire est de toute façon impossible.

La modélisation par le calcul des probabilités a alors été inventée par A.N. Kolmogorov dans un livre paru en 1933. Cette modélisation est faite à partir de l'espace de probabilités  $(U, A, P)$  que nous définirons de manière simpliste un peu plus loin et de manière beaucoup plus précise dans le chapitre traitant dans la théorie de la mesure (voir section d'algèbre).

**Remarque :**

Une grande partie du contenu de ce chapitre est très peu satisfaisante à notre goût. Nous faisons cependant tous les efforts possibles pour essayer de faire digérer et présenter cette branche qui pose souvent problème lors des études scolaire de la meilleure manière qui soit mais nous rencontrons de grandes difficultés. Effectivement nous aimerions nous passer d'exemples et d'exercices et de faire que le tout soit cependant parfaitement compréhensible et clair mais cela est difficile car il nous faut revoir toute la manière d'aborder cette branche des mathématiques. Nous vous remercions donc pour votre compréhension si certaines choses ne sont à ce jour pas claires.

## 2. UNIVERS DES ÉVÉNEMENTS :

a. **Définitions :**

D1. L'univers des événements (dit des "observables" aussi)  $U$  est l'ensemble de toutes les issues (résultats) possibles qui se présentent au cours d'une épreuve aléatoire déterminée.

D2. Soit  $U$  un univers et  $A$  un événement, nous disons que l'événement  $A$  "à lieu" (ou "se réalise") si lors du déroulement de l'épreuve se présente l'issue  $i$  ( $i \in U$ ) et que  $(i \in A)$  dans le cas contraire, nous disons que  $A$  "n'a pas lieu".

D3. Le sous-ensemble vide  $\emptyset$  de  $U$  s'appelle "événement impossible". En effet, si lors de l'épreuve l'issue  $i$  se présente, nous avons toujours  $i \notin \emptyset$  et donc l'événement  $\emptyset$  n'a donc jamais lieu.

D4. Le sous-ensemble  $A$  de  $U$  s'appelle "événement certain". En effet, si lors de l'épreuve l'issue  $i$  se présente, nous avons toujours  $i \in U$  (car  $U$  est l'univers des événements); l'événement  $U$  a donc toujours lieu.

D5. Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $U$ . Nous savons que l'événement  $A \cup B$  et  $A \cap B$  sont tous deux des sous-ensembles de  $U$  donc des événements.

Si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que :

$$A \cap B = \emptyset$$

Les deux événements ne peuvent pas être réalisables pendant la même épreuve (résultat de lancer d'un dé typiquement), nous disons qu'ils sont des "événements incompatibles".

Sinon, si :

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Les deux événements peuvent être réalisables dans la même épreuve (possibilité de voir un chat noir au moment où on passe sous une échelle par exemple), nous disons inversement qu'ils sont des "événements indépendants" (nous y reviendrons plus en détails dans l'étude des axiomes des probabilités).

### b. AXIOMES

La probabilité d'un événement sera en quelque sorte le répondant de la notion de fréquence d'un phénomène aléatoire, en d'autres termes, à chaque événement nous allons attacher un nombre réel, appartenant à l'intervalle  $[0;1]$ , qui mesurera sa probabilité (chance) de réalisation. Les propriétés des fréquences que nous pouvons mettre en évidence lors d'épreuves diverses nous permettent de fixer les axiomes des probabilités.

Attention! La théorie des probabilités représente un cadre théorique dans lequel nous allons pouvoir modéliser le domaine de l'incertain. Comme dans toute formalisation, il existe une part de schématisation de la réalité, qui implique que les résultats obtenus ne seront valides que dans la mesure où cette représentation abstraite et simplifiée de la réalité n'est pas trop éloignée de cette dernière.

Soit  $U$  un univers. Nous disons que nous définissons une probabilité sur les événements de  $U$  si à tout événement  $A$  de  $U$  nous associons un nombre  $P(A)$ , appelé "probabilité à priori de l'événement  $A$ " ou "probabilité marginale de  $A$ ", satisfaisant aux quatre axiomes suivants :

A1. Pour tout événement  $A$ :

$$\exists P(A) \geq 0$$

Ainsi, la probabilité de tout événement est un nombre positif supérieur ou égal à zéro ou inférieur ou égal à 1.

A2. La probabilité de l'événement certain ou de l'ensemble des événements est égal à 1 :

$$P(U) = 1$$

A3. Si  $A \cap B = \emptyset$ , alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La probabilité de la réunion ("ou") de deux événements incompatibles est égale à la somme de leurs probabilités (loi d'addition). Nous parlons alors de "probabilité disjointe" et la notons  $P(A, B)$ .

Autrement dit sous forme plus générale : si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements disjoints deux à deux ( $A_i$  et  $A_j$  ne peuvent pas se produire en même temps si  $i \neq j$ ) alors :

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

Une conséquence immédiate des axiomes (A2.) et (A3.) est la relation entre les probabilités d'un événement  $A$  et de complémentaire, noté  $\bar{A}$  :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A4. Si  $A$  et  $B$  sont indépendants (ou mutuellement exclusifs), nous avons  $A \cap B \neq \emptyset$ , alors (cet axiome est très important en statistiques!) :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

La probabilité de l'intersection ("et") de deux événements indépendants est égale au produit de leurs probabilités (loi de multiplication). Nous parlons alors de "probabilité conjointe" et la notons  $P(A, B)$ .

Autrement dit sous forme plus générale : les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants si la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités :

$$P\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

**Remarque :**

Attention ! Il ne faut pas confondre "indépendants" et "incompatibles". Deux événements indépendants de probabilités non nulles ne sont jamais incompatibles. Si l'un des deux se produit, l'autre ne peut pas se produire.



Soit  $U$  un univers comportant un nombre fini  $n$  d'issues possibles :

$$U = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$$

Les événements :

$$I_1 = \{i_1\}, I_2 = \{i_2\}, \dots, I_n = \{i_n\}$$

Sont appelés "événements élémentaires". Lorsque ces événements ont même probabilité, nous disons qu'ils sont "équiprobables". Dans ce cas, il est très facile de calculer leur probabilité. En effet, ces événements étant par définition indépendants entre eux à ce niveau de notre discours, nous avons en vertu de l'axiome 3 des probabilités :

$$P(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n) = P(I_1) + P(I_2) + \dots + P(I_{n-1}) + P(I_n)$$

Mais puisque :

$$P(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n) = P(U) = 1$$

et que les probabilités du membre de droite sont par hypothèse équiprobables, nous avons :

$$P(I_1) = P(I_2) = P(I_3) = \dots = P(I_n) = \frac{1}{n}$$

Soient deux événements  $A$  et  $B$  réalisés respectivement  $n$  et  $m$  fois au cours de  $N$  épreuves. Nous avons donc :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{N} = \frac{n}{N} \text{ et } P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{N} = \frac{m}{N}$$

Si de plus  $A$  et  $B$  sont réalisés simultanément  $N$  fois, nous avons pour probabilité conjointe :

$$P(A \cap B) = \frac{n \cdot m}{N^2}$$

### 3. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Que pouvons-nous déduire sur la probabilité de l'événement  $B$  sachant que l'événement  $A$  est réalisé? Cette probabilité est appelée "probabilité conditionnelle" ou "technique bayésienne" de  $B$  sachant  $A$  et se note dans le cadre de l'étude des probabilités conditionnelles :

$$P(B/A)$$

Et dans la pratique :

$$P(B | A)$$

**Remarque :** Cette probabilité est aussi appelée "fonction de vraisemblance de  $A$ ".

Dans notre cas, nous avons :

$$P(B | A) = \frac{k}{n} \quad \text{ou} \quad P(A | B) = \frac{k}{m}$$

La deuxième relation étant appelée la "probabilité à posteriori" de  $A$  sachant  $B$ . Elle est postérieure, au sens qu'elle dépend directement de  $B$ .

Nous voulons définir la probabilité d'un événement conditionnellement (relativement) à un autre événement. Historiquement, le premier mathématicien à avoir utilisé correctement la notion de probabilité conditionnelle fut Thomas Bayes (1702-1761). Aussi parlons-nous souvent de Bayes ou de bayésien dès que des probabilités conditionnelles sont en jeu: formule de Bayes, statistique bayésienne...

La notion de probabilité conditionnelle que nous allons introduire est beaucoup moins simple qu'elle ne paraît a priori et les problèmes de conditionnement sont une source inépuisable d'erreurs en tout genre. A titre d'illustration, nous pourrions méditer la petite histoire suivante:

Il est extrêmement improbable que deux personnes ayant chacune une bombe prennent le même avion. Quelle est alors la meilleure façon d'éviter d'avoir une bombe dans son avion? Réponse: il faut se munir d'une bombe puisque la probabilité qu'il y ait une deuxième bombe sachant qu'il y en a déjà une est extrêmement faible...

Revenons à des considérations plus mathématiques.

Supposons que nous ayons deux dés. Imaginons maintenant que nous ayons lancé seulement le premier dé. Nous voulons savoir quelle est la probabilité qu'en lançant le second dé, la somme des deux chiffres vaille 12. Ainsi, la probabilité d'obtenir 12 sachant la valeur du premier dé est totalement différente de la probabilité d'obtenir 12 en lançant les deux dés. Comment calculer cette nouvelle probabilité? Prenons le problème dans l'autre sens. Supposons que le résultat du premier dé soit 6. Un argument empirique du type "règle de trois" (voir mathématiques financières) nous dirait (imagination) que la probabilité que la somme des chiffres des deux dés vaille 8 ou 9 sera le double de la probabilité que la somme des chiffres vaille 7. Formalisons la démarche. Après le lancer du premier dé, nous avons une nouvelle loi qui tient compte de l'information supplémentaire:

$$A = \{\text{le résultat du premier lancer est } \dots\}$$

Notons cette nouvelle loi  $P(\cdot / A)$ . Comment la déterminer? Deux solutions sont envisageables:

S1. Soit nous remodelons notre problème

S2. Soit nous calculons  $P(\cdot / A)$

À partir de la probabilité  $P$  initiale. Nous allons choisir la deuxième solution. Soit  $B \subset A$ . En généralisant l'argument "règle de trois", nous pressentons que  $P(B / A)$  doit être proportionnel à  $P(B)$ , la constante de proportionnalité étant déterminée par la normalisation  $P(A / A) = 1$ .

Soit maintenant  $B \subset A^c$  ( $B$  est inclus dans le complémentaire de  $A$ ). Il est assez intuitif que  $P(B / A) = 0$ . Ceci nous mène aux définitions suivantes :

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Le nombre  $P(B / A)$  s'appelle "probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$ ".

### Interprétation :

La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier l'idée que nous nous faisons de la probabilité d'un événement. Ainsi, le fait de savoir que  $B$  est réalisé réduit l'ensemble des résultats possibles de  $U$  à  $B$ . A partir de là, seules les éventualités de  $A \cap B$  ont une importance. La probabilité de  $A$  sachant  $B$  doit donc être proportionnelle à  $P(A \cap B)$ . Le coefficient de proportionnalité  $1/P(B)$  assure que l'application qui à  $A$  associe  $P(A / B)$  est bien une probabilité, pour laquelle  $B$  est l'événement certain.

### Remarque :

Attention la notation  $P(B / A)$  est quelque peu dangereuse. En effet,  $B / A$  n'est pas un événement (ni une division par ailleurs...)!

Une loi de probabilité conditionnelle est une loi de probabilité. En particulier, si  $A_1, A_2$  sont disjoints (incompatibles) et réalisé parmi les expériences où  $B$  l'est aussi. Alors :

$$P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_2 / B)$$

Aussi :

$$P(\bar{A} / B) = 1 - P(A / B)$$

La définition des probabilités conditionnelles s'utilise souvent sous la forme :

$$P(A \cap B) = P(A / B) \cdot P(B) = P(B / A)P(A)$$

Soit :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Exemple :

Supposons une maladie comme la méningite. La probabilité de l'avoir sera noté  $P(M) = 0.001$  (chiffre arbitraire pour l'exemple) et un signe de cette maladie comme le mal de tête qui sera noté  $P(S) = 0.1$ . Supposons connu la probabilité d'avoir mal à la tête si nous avons une méningite  $P(S|M) = 0.9$ . Le théorème de Bayes donne alors la probabilité d'avoir un méningite si nous avons mal à la tête :

$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = 0.09$$

Maintenant, notons que nous avons aussi:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i \in \Omega} P(A \cap B_i) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ &= \sum_{i \in \Omega} P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

qui est la "formule des probabilités totales" ou encore "théorie des probabilités totales". Mais aussi, pour tout  $j$ , nous avons :

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

Il faut savoir que les implications de ce théorème sont cependant considérables dans le quotidien, dans la médecine, dans l'industrie et dans le domaine du Data Mining informatique.

Ainsi, pour résumer simplement, si A et B sont deux événements, le théorème de Bayes permet de déterminer la probabilité de A sachant B, si nous connaissons les probabilités de A, de B et de B sachant A.

G. Résoudre des problèmes de probabilité et de statistique.

1. Notion de variables qualitatives.

Se dit, en statistique, d'une variable pour laquelle la valeur mesurée sur chaque individu (parfois qualifiée de catégorie ou de modalité) ne représente pas une quantité. On ne peut alors pas calculer un total pour un ensemble d'individus. Les variables qualitatives s'opposent aux variables quantitatives.

On distingue le cas particulier des variables ordinales qui sont des variables qualitatives numériques. Exemple de l'appréciation des clients pour un produit, qu'on peut noter de -2 (très mauvais) à +2 (excellent), en passant par zéro (indifférent).

## 2. Notion de variables quantitatives.

Se dit, en statistique, d'une variable pour laquelle la valeur mesurée sur chaque individu représente une quantité. On peut alors calculer un total pour un ensemble d'individus.

Exemple du poids d'un ensemble d'individus. Si plusieurs individus montent sur une balance, leur masse totale est la somme de leurs masses individuelles.

Contre exemple de la variable étage d'un ensemble de logements. Cette variable est mesurée par un nombre, mais ce n'est pas une quantité, on ne peut pas faire un total avec les étages de plusieurs logements. Par contre, la variable "pièces" des logements est quantitative.

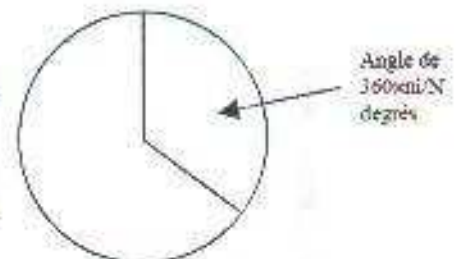
Les **variables quantitatives** s'opposent aux variables qualitatives, pour lesquelles le calcul d'un total associé à plusieurs individus à partir de leurs valeurs individuelles ne peut pas résulter d'une opération mathématique.

## 3. Représentation des variables qualitatives et quantitatives.

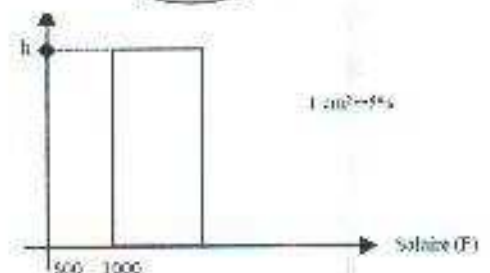
Deux représentations graphiques sont adaptées aux variables qualitatives : la représentation en tuyaux d'orgue et celle en secteurs circulaires :

- Tuyaux d'orgue : On représente pour chaque modalité un bâton dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) correspondant.
- Secteurs circulaires : chaque modalité est représentée par un secteur circulaire d'angle proportionnel à l'effectif correspondant.
- Histogramme des fréquences : une correspondance d'aire est établie avec la modalité.

Toute la population :  $N$  individus  $\rightarrow 360^\circ$   
Donc : 1 individu  $\rightarrow 360/N$   
Pour l'effectif  $n_i$  :  $n_i$  individus  $\rightarrow 360n_i/N$



$1 \text{ cm}^2 \rightarrow 25\%$   
 $8 \text{ cm}^2 \rightarrow 16,7\%$  (aire correspondant à la première classe)  
Donc :  $a = 9,285 \text{ cm}^2$   
Par ailleurs, cette aire vaut :  $h$  que multiplie la base du rectangle (8)  
Or :  $h = (1000 - 500) / 150 = 3,33 \text{ cm}$   
Donc :  $h = a/b = 9,285 / 1,33 = 6,98 \text{ cm}$



## 4. Calcul des paramètres de tendance.

Il s'agit de trouver des valeurs permettant de synthétiser l'information contenue dans une série statistique quantitative.

a. Paramètre de tendance centrale :• La moyenne :

Elle se calcule comme suit :

$$m(x) = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_p n_p}{n} = x_1 \frac{n_1}{n} + \dots + x_p \frac{n_p}{n}$$

• La médiane :

La médiane  $Me$  est la valeur permettant de séparer la population en deux parties égales : Pour 50% des individus la valeur de la variable supérieur à  $Me$  et pour 50% elle est en dessous de  $Me$ .

b. Paramètres de dispersion :

Un paramètre de tendance centrale ne peut pas être un bon résumé statistique. La moyenne ne permet pas de distinguer une distribution de notre où tous les étudiants auraient 10/20 d'une distribution où les étudiants auraient pour moitié 0/20 et 20/20 : dans ces deux cas la moyenne est la même mais la dispersion des notes autour de cette dernière diffère d'un cas à un autre.

• L'écart type :

L'écart type, noté  $s(x)$ , est la racine carrée de la variance,  $v(x) = m(x^2) - m(x)^2$ . Un calcul simple montre que :

$$v(x) = x_1^2 \frac{n_1}{n} + \dots + x_p^2 \frac{n_p}{n} - m^2$$

Les quartiles :

Les quartiles,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  divisent l'effectif de la série statistique préalablement ordonnée par ordre croissant en quatre parties égales. On s'aperçoit que le deuxième quartile n'est autre que la médiane. Le principe du calcul des premiers et troisièmes quartiles est identique à celui de la médiane :  $Q_1$  est associé à 25% et  $Q_3$  à 75%.

- Le coefficient de corrélation :

Il quantifie la corrélation linéaire. On le note généralement  $r(X; Y)$  ou plus simplement  $r$ . Ce coefficient est égale à :

$$r(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{s(X)s(Y)}$$

Où  $\text{Cov}(X; Y)$  est la covariance de  $X$  et  $Y$  et s'obtient comme suit :

$$\text{cov}(X; Y) = \frac{(x_1 - m(X))(y_1 - m(Y)) + (x_2 - m(X))(y_2 - m(Y)) + \dots + (x_p - m(X))(y_p - m(Y))}{n}$$

## GUIDE DES TRAVAUX DIRIGÉS



TRAVAUX DIRIGESA° Systèmes de numération :

- 1- Représenter  $[2153]_6$  dans le système décimal.  
(Solution : 501)
- 2- Convertir  $[0,3123]_4$  dans le système décimal.  
(Solution : 0,85546875)
- 3- Convertir le décimal 626,4375 dans le système à base 4  
(Solution : 21302,13)
- 4- Convertir le décimal 1476 dans le système octal.  
(Solution : 2704)
- 5- Convertir l'octal  $[25146]_8$  dans le système décimal.  
(Solution : 10854)
- 6- Convertir en binaire les nombres :
  - a.  $[43027]_8$
  - b.  $[21,673]_8$(Solution : a : 100011000010111, b : 010001,110111011)
- 7- Convertir en octal :
  - a. 11101010110
  - b. 1001101,01100001
- 8- Effectuer les additions suivantes en octal :

6254	36517	465,37
+4176	+64753	+ 31,613

(Solutions : 12452 ; 123472 ; 517,203)
- 9- Evaluer les compléments à 8 des nombres suivants en octal :
  - a. 40613
  - b. 716520
  - c. 335500(Solutions : 37165 ; 061260 ; 442300)
- 10- Effectuer chacune des soustractions suivantes en octal :
  - a. 6214 - 3527
  - b. 4617263 - 1423736(Solutions : 2465 ; 3173324)
- 11- Convertir en hexadécimal le décimal  $X = 15\,321$
- 12- Transformer l'hexadécimal 1A74 en sa forme décimale
- 13- Convertir en binaire les hexadécimaux :
  - a. 3D59
  - b. 27, A3C
- 14- Convertir en hexadécimal les binaires :
  - a. 10110100101110
  - b. 11100,1011011011
- 15- Effectuer :
  - a. 82C5 + 9D86
  - b. 83A7F4 + B5B63
  - c. 4C, 3E + 2, 5D8
- 16- Calculer les compléments à 16 de :
  - a. 74B9

- b. 5C0F8  
c. 2A7600

17- Effectuer :

- a. 74B64 – 42AF  
b. 9C4D819 – 23C0482

1.	Citer 2 exemples d'appareils fonctionnant principalement de manière analogique	
<b>Réponse(s) :</b> <i>Thermomètre au mercure, compteur de vitesse (à aiguille), montre (à aiguille)</i>		
2.	Citer 2 exemples d'appareils fonctionnant principalement de manière numérique	
<b>Réponse(s) :</b> <i>Ordinateur, calculatrice</i>		
3.	Quels seraient les symboles d'un système numérique en base 14 ?	
<b>Réponse(s) :</b> <i>0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D</i>		
4.	Quels seraient les symboles d'un système numérique en base 12 ?	
<b>Réponse(s) :</b> <i>0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B</i>		
5.	Montrer, à l'aide d'une flèche, le MSB du mot binaire suivant:  10111001	
<b>Réponse(s) :</b> <i>10111001</i>		
6.	Montrer, à l'aide d'une flèche, le LSB du mot binaire suivant:  10111001	
<b>Réponse(s) :</b> <i>10111001</i>		
7.	Que signifie LSB ? (Répondre en anglais et en français)	
<b>Réponse(s) :</b> <i>Least Significant Bit; le bit de poids le plus faible</i>		
8.	Que signifie MSB ? (Répondre en anglais et en français)	
<b>Réponse(s) :</b> <i>Most Significant Bit; le bit de poids le plus fort</i>		
9.	<b>Compléter la phrase suivante :</b> La représentation numérique d'une grandeur évolue de façon ..... alors que la représentation analogique évolue de façon	

	.....	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>discontinue, continue</i>	
10.	<b>Compléter la phrase suivante :</b> La représentation analogique d'une grandeur évolue de façon ..... alors que la représentation numérique évolue de façon .....	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>continue..... discontinue</i>	

### Conversion décimal -> binaire

1.	Convertir le décimal suivant en binaire:  $10.625_{10} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>1010,101<sub>2</sub></i>	
2.	Convertir le décimal suivant en binaire:  $23.125_{10} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>10111,001<sub>2</sub></i>	
3.	Convertir le décimal suivant en binaire:  $19.25_{10} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>10011,01<sub>2</sub></i>	
4.	Convertir le décimal suivant en binaire:  $9.5_{10} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>1001,1<sub>2</sub></i>	
5.	Convertir le décimal suivant en binaire:  $12.75_{10} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>1100,11<sub>2</sub></i>	
6.	Convertir le décimal suivant en binaire:  $17.375_{10} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>10001,011<sub>2</sub></i>	
1.	Convertir le binaire suivant en décimal:  $1011.11_2 \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>11,75<sub>10</sub></i>	
2.	Convertir le binaire suivant en décimal:  $1101.01_2 \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> <i>13,25<sub>10</sub></i>	
3.	Convertir le binaire suivant en décimal:  $1101.01_2 \Rightarrow$	

**Réponse(s) :  $13,25_{10}$**

4. Convertir le binaire suivant en décimal:

$$1011.11_2 \Rightarrow$$

**Réponse(s) :  $11,75_{10}$**

5. Convertir le binaire suivant en décimal:

$$101011.11_2 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

**Réponse(s) :  $43,75_{10}$**

6. Convertir le binaire suivant en décimal:

$$111010.01_2 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

**Réponse(s) :  $58,25_{10}$**

1. Convertir le décimal suivant en hexadécimal:

$$13.5_{10} \Rightarrow$$

**Réponse(s) :  $D,8_{16}$**

2. Convertir le décimal suivant en hexadécimal:

$$14.25_{10} \Rightarrow$$

**Réponse(s) :  $E,4_{16}$**

3. Convertir le décimal suivant en hexadécimal:

$$31.25_{10} \Rightarrow$$

**Réponse(s) :  $1F,4_{16}$**

4. Convertir le décimal suivant en hexadécimal:

$$13.5_{10} \Rightarrow$$

**Réponse(s) :  $D,8_{16}$**

5. Convertir le décimal suivant en hexadécimal:

$$90.25_{10} \Rightarrow \dots\dots\dots$$

**Réponse(s) :  $5A,4_{16}$**

6. Convertir le décimal suivant en hexadécimal:

$$92.5_{10} \Rightarrow \dots\dots\dots$$

**Réponse(s) :  $5C,8_{16}$**

1. Convertir l'hexadécimal suivant en décimal:

$$F.8_{16} \Rightarrow$$

**Réponse(s) :  $15,5_{10}$**

2. Convertir l'hexadécimal suivant en décimal:

	$19.4_{16} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> $25,25_{10}$	
3.	Convertir l'hexadécimal suivant en décimal:  $1B.6_{16} \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> $27,375_{10}$	
4.	Convertir l'hexadécimal suivant en décimal:  $D.C \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> $13,75_{10}$	
5.	Convertir l'hexadécimal suivant en décimal:  $A.4 \Rightarrow$	
	<b>Réponse(s) :</b> $10,25_{10}$	

**Exercice 1 (Système de numération: conversion):**

- Convertir  $(102)_{10}$  en Binaire, Octal et Hexadécimal.
- Convertir  $(110011101)_2$  en Décimal, Octal et Hexadécimal.
- Convertir  $(715)_8$  en Binaire, Décimal et Hexadécimal.
- Convertir  $(F0E)_{16}$  en Binaire, Décimal et Octal.

NB : montrez la méthode utilisée exhaustivement.

**Exercice 2 (logique combinatoire et algèbre de Boole):**

Soit F une fonction logique décrite comme suit :

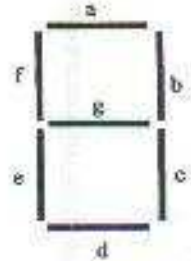
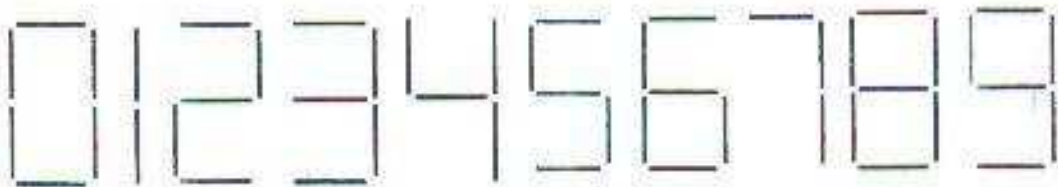
$$\begin{cases} F(a,b,c) = 0 \text{ si le nombre des } 0 \text{ est plus grand que celui des } 1 \\ F(a,b,c) = 1 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

- Donner la table de vérité de F.
- Déduire l'expression algébrique de F.
- Dresser la table de karnaugh et donner l'expression simplifiée de F.
- Tracer le logigramme de F après simplification.
- Cette fonction peut elle servir pour détecter les erreurs de transmission ? expliquez.

**DEVOIR NON SURVEILLÉ**  
**(Décodeur 7 segments)****Préambule :**

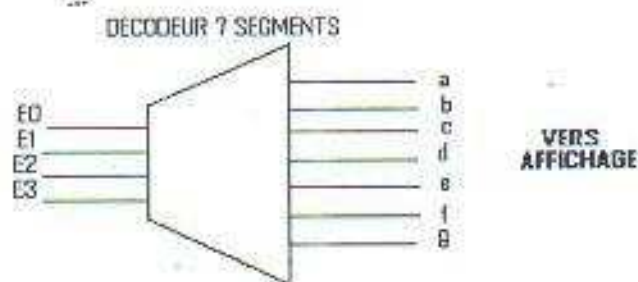
On appelle décodeur 7 segments le système permettant de passer du mot d'entrée codé binaire 4 bits au mot de sortie codé 7 segments (dans notre cas l'affichage se fera de 0 à 9).

L'interprétation visuelle de l'affichage du chiffre est formée par l'allumage des segments d'un afficheur. Soient  $E_0, E_1, E_2, E_3$  les variables d'entrées du clavier. Soient  $a, b, c, d, e, f, g$  les variables de sorties correspondant aux 7 segments. (Si la variable est active (niveau haut) le segment est allumé). Les segments sont répartis de la manière suivante :

**Caractères possibles :****Objectif :**

Nous souhaitons donc réaliser un système qui permet le passage du code binaire 4 bits au code 7 segments. Plus précisément l'affichage de tous les chiffres décimaux de 0 à 9. Dans notre système il y a des combinaisons qui sont indésirables, 10; 11; 12; 13; 14; 15. -

Ces états s'appellent des aléas de fonctionnement, dans les tableaux de Karnaugh on les matérialise par un X.

**Schéma du décodeur 7 segments :****Questions :**

a- Donner la table de vérité des sorties ( $a, b, c, d, e, f, g$ ) en fonction des entrées  $E_0, E_1, E_2, E_3$ .

b- Dresser la table de Karnaugh qui correspond à chaque sortie et donner son expression simplifiée.

gigramme de chaque sortie ( $a, b, c, d, e, f, g$ ).



Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail  
Direction RégionaleExamen de Fin de Module  
Année 2005 / 2006

Filière : TSRI.....

Durée : 4 heures

Niveau : TS.....

Barème : /40

**SYSTÈMES DE NUMÉRATION :****EXERCICE 1 :**

1.1 - Convertir en base 10 les nombres suivants :

$$(1101101)_2 \quad (1567)_8 \quad (FF)_{16} \quad (100)_{16} \quad (10101, 101)_2$$

1.2 - Convertir en binaire (base 2) :

$$(65)_8 \quad (CAFE)_{16} \quad (255)_{10} \quad (121,25)_{10} \quad (28,408)_{10}$$

1.3 - Codifier sur 8 bits les nombres suivants :

$$(-1)_{10} \quad (-128)_{10} \quad (127)_{10}$$

**EXERCICE 2 :**

2.1 - Effectuer les opérations suivantes en binaire :

$$\text{> } 10010101 + 101001$$

$$\text{> } 110111 - 10101$$

$$\text{> } 1001 \times 111$$

$$\text{> } 101010 \text{ divisé par } 110$$

2.2 - Trouver la valeur de x vérifiant l'équation suivante :  $(101)_{x,2} = 5$ **ALGÈBRE DE BOOLE :****EXERCICE 1 :**

1- dessiner les logigrammes des fonctions suivantes en utilisant des portes à deux entrées:

$$1.1- F(A,B,C) = A \oplus B \oplus C$$

$$1.2- G(A,B,C,D) = A \oplus BC \oplus (A+D)$$

2- Montrer les relations suivantes :

$$2.1- \overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus B = A \oplus \overline{B}$$

$$2.2- A + BC = (A+B)(A+C)$$

$$2.3- AB + \bar{A}C = AB + \bar{A}C + BC$$

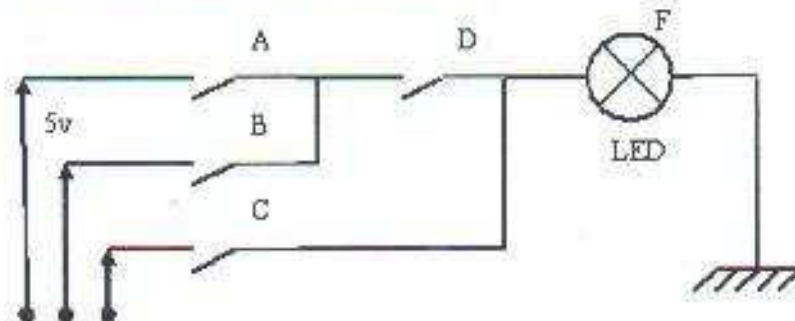
3- Soit la table de vérité suivante, avec  $x$  comme entrée et  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$  et  $F4$  comme sorties :

$x$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Donner les expressions :  $F1(x)$ ,  $F2(x)$ ,  $F3(x)$ ,  $F4(x)$ .

### EXERCICE 2 :

Considérons le schéma logique suivants comportant :



- 1- Donnez la table de vérité de  $F$ , et exprimer  $F$  en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
- 2- Simplifiez la fonction  $F$ .
- 3- Donnez le logigramme de  $F$ .