مكتب التكوين المهني و إنعاش الشغل
Office de la Formation Professionnelle
et de la Promotion du Travail

Secteur : **Gestion Commerce**

Manuel du stagiaire

M 203 : MATHEMATIQUES FINANCIERES

2ème Année

Filière :

Assistant Administratif

Option :

Comptabilité

Technicien

TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION

Les mathématiques financières sont une composante des mathématiques appliquées. La particularité des mathématiques financières est, comme son nom l'indique, qu'elles s'appliquent aux opérations financières.
En mathématiques financières, le temps c'est de l'argent. En effet, les mathématiques financières ont pour caractéristique de prendre en compte le temps qui passe, impliquant ainsi certains concepts incontournables en finance tels que l'actualisation et la capitalisation.
Ainsi, les mathématiques financières vont nous permettre de calculer, avec précision, des intérêts issus d'opérations financières. Il existe, en règle générale, deux grands types d'opérations financières dans les mathématiques financières qui sont le placement et l'emprunt.
Ce cours traite :

- Les intérêts simples ;
- Les intérêts composés ;
- Les annuités ;
- Les emprunts indivis.

A. S'APPROPRIER LES BASES DES INTERETS SIMPLES

INTERET, CAPITALISATION ET ACTUALISATION

1. Définition et justification de l'intérêt

1.1. Définition de l'intérêt

C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps. Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt :

- La somme prêtée
- La durée du prêt
- Et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt : L'intérêt simple et l'intérêt composé.

1.2. Justification de l'intérêt

Plusieurs raisons ont été avancées pour justifier l'existence et l'utilisation de l'intérêt, parmi lesquelles on peut citer :

- La privation de consommation : Lorsqu'une personne (le prêteur) prête une somme d'argent à une autre personne (l'emprunteur), elle se prive d'une consommation immédiate. Il est ainsi normal qu'elle reçoive en contrepartie une rémunération de la part de l'emprunteur pour se dédommager de cette privation provisoire.
- La prise en compte du risque : Une personne qui prête de l'argent, pendant une durée étalée dans le temps. Elle court, dès lors, un risque inhérent au futur. La réalisation de ce risque résulte au moins des éléments suivants :
  - L'insolvabilité de l'emprunteur : dans le cas où l'emprunteur se trouve incapable de rembourser sa dette, lorsque celle-ci vient à échéance, le prêteur risque de perdre son argent. Il est alors normal qu'il exige une rémunération pour couvrir le risque encouru et dont l'importance sera appréciée en fonction de la probabilité de non remboursement.
  - L'inflation : entre la date de prêt et la date de remboursement, la valeur du prêt peut diminuer à la suite d'une érosion monétaire connue également sous le nom d'inflation. Le prêteur peut donc exiger une rémunération pour compenser cet effet.

2. Actualisation et Capitalisation

2.1. Principe

D'après ce qui précède, le taux d'intérêt apparaît comme le taux de transformation de l'argent dans le temps. Cette relation entre le temps et le taux d'intérêt signifie que deux sommes d'argent ne sont équivalentes que si elles sont égales à la même date.

Dès lors pour pouvoir comparer deux ou des sommes disponibles à différentes dates le passage par les techniques de calcul actuariel (capitalisation et actualisation) devient nécessaire.

2.2. L'actualisation

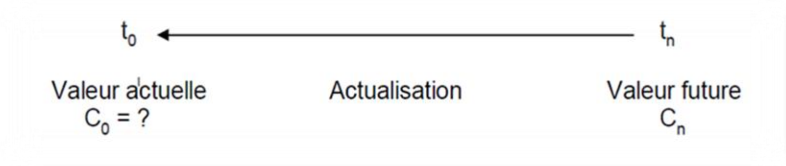
L'actualisation est une technique qui consiste à faire reculer dans le temps une valeur future pour calculer sa valeur présente appelée Valeur Actuelle.

La valeur actuelle C0 d'une somme d'argent C1 disponible dans une année et placée au taux t, est donnée par la formule suivante,

$$C_0 \ = \ C_1 \times (1+t)^{-1}$$

Dès lors, la valeur actuelle C0 d'une somme d'argent Cn disponible dans n années d'intervalle et placée au taux t, est égale à :

$$C_0 \ = \ C_n \times (1+t)^{-n}$$



2.3. La capitalisation

Contrairement à l'actualisation, la capitalisation consiste à faire avancer dans le temps une valeur présente pour calculer sa valeur future appelée aussi Valeur Acquise.

La valeur acquise C1 d'une somme d'argent présente C0 capitalisée au taux t pendant une année est égale à :

$$C_1 \ = \ C_0 \times (1+t)$$

Dès lors, la valeur future Cn d'une somme d'argent présente C0 disponible après n années et placée au taux t est égale à :

$$C_n \ = \ C_0 \times (1+t)^n$$

3. L'intérêt simple

3.1. Principe et champ d'application

L'intérêt simple se calcule toujours sur le principal. Il ne s'ajoute pas au capital pour porter lui-même intérêt. L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté. Il est d'autant plus élevé que le montant prêté ou emprunté est important et que l'argent est prêté ou emprunté pour longtemps. Il est versé en une seule fois au début de l'opération, c.à.d. lors de la remise du prêt, ou à la fin de l'opération c.à.d. lors du remboursement

L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (Inférieur à un an)

3.2. Calcul pratique

Soit,

C : le montant du capital prêté ou emprunté en Dh (Valeur nominale)

T : le taux d'intérêt annuel (en pourcentage)

N : la durée e placement (en année)

I : le montant de l'intérêt à calculer en Dh

V : la valeur acquise par le capital en Dh (valeur future)

On a : $I = C \times t\% \times n$

$$I = \frac{C.t.n}{100} \quad \text{et :} \quad \left.\begin{array}{c} V = C + I \\ V = C + \dfrac{C.t.n}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V = C\left(1 + \frac{t.n}{100}\right)$$

Remarque :

- Si la durée du placement est exprimée en mois, on aura :

$$I = C \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{n}{12} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{C.t.n}{1200} \quad \text{Et} \quad V = C\left(1 + \frac{t.n}{1200}\right)$$

- Si la durée du placement est exprimée en jours, on aura :

$$I = C \cdot \frac{t}{100} \cdot \frac{n}{360} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{C.t.n}{36000} \quad \text{Et} \quad V = C\left(1 + \frac{t \cdot n}{36000}\right)$$

- Pour une durée de placement exprimée en jours, l'usage fait que l'intérêt est calculé sur la base de l'année financière ou commerciale comptant 360 jours et non pas l'année civile comptant 365 jours ou 366 jours. L'exception est faite pour les comptes à terme et les bons de caisse dont l'intérêt servi est calculé sur la base de l'année civile, c'est-à-dire 365 jours
- Par ailleurs, il faut aussi signaler que lorsque la durée est exprimée en jours, les mois sont comptés à leur nombre exact de jours, et on ne tient compte que de l'une des deux dates extrêmes.

Exercice 1

Vous placez une somme de 4 500 DH sur un livret de caisse d'épargne durant 7 mois au taux de 3 %. Calculer l'intérêt acquis.

$$\text{Intérêt} = 4\,500 \times (7/12) \times (3/100) = 78.75 \text{ dh}$$

Exercice 2

Une créance de nominal 1000 DH au 1er juin sera payée par traite le 31 août. Taux d'intérêt : 12 % par an Calculer le montant de la traite à créer

$$\textbf{Durée} = \textbf{3 mois (1er juin au 31 août)}$$

$$\textbf{Intérêt} = \mathbf{1\,000 \times (3/12) \times (12/100) = 30\ Dh}$$

$$\textbf{Traite} = \mathbf{1\,000 + 30 = 1\,030\ Dh}$$

Exercice 3

Vous bénéficiez d'un escompte de règlement de 2 % sur une créance de 15 000 DH à 60 jours. Calculer le montant du chèque à réaliser.

$$\textbf{Escompte} = \textbf{15 000} \times (\textbf{60/360}) \times (\textbf{2/100})$$

$$\textbf{Escompte} = \textbf{50 Dh}$$

$$\textbf{Chèque} = \textbf{15 000} - \textbf{50} = \textbf{14 950 Dh}$$

Exercice 4

Un effet de nominal 760 Dh au 30 juin est négocié le 30 avril auprès de la banque. Taux d'intérêt : 15% par an. Calculer la valeur actuelle de cette traite

$$\textbf{Durée} = \textbf{2 mois (30 avril au 31 juin)}$$

$$\textbf{Intérêt} = \textbf{760} \times (\textbf{2/12}) \times (\textbf{15/100}) = \textbf{19 Dh}$$

$$\textbf{Valeur actuelle} = \textbf{760} - \textbf{19} = \textbf{741.00 Dh}$$

Exercice 5 (Durée)

Combien de temps faut-il placer un capital de 30 000 Dh au taux de 8 % pour qu'il rapporte 1 200 Dh ? (3méthodes)

$$\textbf{1 200} = \textbf{30 000} \times (\boldsymbol{X}) \times (\textbf{8/100})$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{1 200} / (\textbf{30 000} \times \textbf{8/100})$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{1 200} / \textbf{2 400}$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{0.5}\ \boldsymbol{Durée} = \textbf{0.5} \times \textbf{12}\ \boldsymbol{mois} = \textbf{6}\ \boldsymbol{mois}$$

Exercice 6 (Taux)

A quel taux faut-il placer un capital de 20 000 Dh pendant 6 mois pour qu'il rapporte 1 000 Dh ?

$$\textbf{1 000} = \textbf{20 000} \times (\textbf{6/12}) \times (\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{1 000} / (\textbf{20 000} \times \textbf{6/12})$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{1 000} / \textbf{10 000}$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{0.1}\ \boldsymbol{Taux} = \textbf{0.1} \times \textbf{100} = \textbf{10 \%}$$

Exercice 7 (Capital)

Quel capital placé pendant 8 mois au taux de 8 % rapporte 2000 Dh ?

$$\textbf{2 000} = \boldsymbol{X} \times (\textbf{8/12}) \times (\textbf{8/100})$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{2000}/ ((\textbf{8/12}) \times (\textbf{8/100}))$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{2000/0.05333333}$$

$$\boldsymbol{X} = \textbf{37 500}\ \boldsymbol{Dh}$$

Exercice 8

Une somme de 10 000 Dh est placée sur un compte du 23 AVRIL au 9 Août au taux simple de 7% :

- Calculer le Montant de l'intérêt
- Calculer la valeur acquise par ce capital

- Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 Dh.

Solution

a) On a ; $I = (C \times (T \times (N) / 36000$ avec $C = 10\,000, T = 7$, Calculons alors le nombre de jours

$$\left.\begin{aligned} Avril &= 7 \\ Mai &= 31 \\ Juin &= 30 \\ Juillet &= 31 \\ Août &= 9 \end{aligned}\right\} \quad 108\, jours$$

$$I = (10\,000 * 7 * 108) / 36000 = 210\, Dh$$

b) La valeur acquis par ce capital est égale à V

$$V = C + I = 10\,000 + 210 = 10\,210\, DH$$

c) Date de remboursement correspondant à un intérêt de 315 Dh

$$I = (C * T * N) / 36\,000\ donc$$

$$N = 36\,000 * I / (C * T)$$

$$\Rightarrow N = 36\,000 \times 315 / (10\,000 \times 7) = 162\, Jours$$

$$\left.\begin{aligned} Avril &= 7 \\ Mai &= 31 \\ Juin &= 30 \\ Juillet &= 31 \\ Août &= 31 \\ Septembre &= 30 \\ Octobre &= 2 \end{aligned}\right\} \quad 162\, jours$$

3.3. Taux moyen d'une série de placements simultanés

Soit J opérations de placement simultanées à intérêt simple de sommes Cj, aux taux Tj , sur Nj jours.

Opération de placement	1	2	…………………………………………	J
Capital	C_1	C_2	…………………………………………	C_j
Taux	T_1	T_2	…………………………………………	T_j
Durée	N_1	N_2	…………………………………………	N_j

Le taux Moyen de cette série de placement est un taux unique T qui, appliqué à cette même série, permet d'obtenir le même intérêt total.

L'intérêt total de cette série est égal à :

$$I = \frac{C_1 \times T_1 \times N_1}{36000} + \frac{C_2 \times T_2 \times N_2}{36000} + \frac{C_3 \times T_3 \times N_3}{36000} + \cdots + \frac{C_j \times T_j \times N_j}{36000}$$

D'après la définition, le taux moyen de placement sera calculé par la résolution de l'égalité suivante :

$$I=\frac{C_1\times T_1\times N_1}{36000}+\frac{C_2\times T_2\times N_2}{36000}+\frac{C_3\times T_3\times N_3}{36000}+\cdots+\frac{C_j\times T_j\times N_j}{36000}=\frac{C_1\times T\times N_1}{36000}+\frac{C_2\times T\times N_2}{36000}+\frac{C_3\times T\times N_3}{36000}+\cdots+\frac{C_j\times T\times N_j}{36000}$$

$$\sum_{i=1}^{j} C_i\times T_i\times N_i = T\times\sum_{i=1}^{j} C_i\times N_i \;\Rightarrow\; T=\frac{\sum_{i=1}^{j} C_i\times t_i\times n_i}{\sum_{i=1}^{j} C_i\times n_i}$$

Exercice :

Calculer le Taux moyen déplacement des capitaux suivants :

- 2 000 Dh placés à 3% pendant 30 jours,
- 3000 Dh placés à 4% pendant 40 jours
- 4000 Dh placés à 5% pendant 50 jours

Solution

$$T=\frac{2000\times 3\times 30+3000\times 4\times 40+4000\times 5\times 50}{2000\times 30+3000\times 40+4000\times 50}=4{,}37\%$$

$$\boxed{T\;=\;4{,}37\%}$$

3.4. Terme échu, terme à échoir, taux effectif

Comme on l'a déjà signalé, selon les modalités du contrat de prêt ou de placement, les intérêts peuvent être versés en début ou en fin de période :

- Lorsque les intérêts sont payés en fin de période, on dit qu'ils sont post-comptés ou terme échu. Ils sont calculés au taux d'initial C qui représente le nominal. Ils sont ajoutés ensuite, au nominal pour constituer le capital final V (Valeur acquise).

  Pour un capital initial égal à C on a donc

$$\boxed{V=C\times\left(1+\frac{T\times N}{36000}\right)}$$

- Lorsque les intérêts sont payés en début de période, on dit qu'ils sont précomptés ou terme à échoir. Ils sont calculés sur le nominal, qui constitue la somme finale C et retranchés du nominal pour déterminer la somme initiale ou mise à disposition.

Etant donné un nominal «égal à C, on aura alors C' = C- I, où C' désigne la somme initiale.

- Quand les intérêts sont payables d'avance, le taux d'intérêt effectif est celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté C' donne le montant de l'intérêt produit. En désignant par T, le taux effectif, on aura alors :

$$\frac{C\cdot t\cdot n}{36000}=\frac{C'\cdot T\cdot n}{36000},\qquad Or:\quad C'=C-I=C-\frac{C\cdot t\cdot n}{30000}$$

$$Donc:\ \frac{C\cdot t\cdot n}{36000}=\frac{\left(C-\frac{C.t.n}{36000}\right).T.n}{36000}$$

$$t=T\left(1-\frac{t.n}{36000}\right)\quad \text{donc}\quad T=\frac{t}{1-\frac{t\cdot n}{36000}}$$

Exemple :

Une personne place à intérêts précomptés la somme de 30 000 Dh pour une durée de 6mois au taux de 10%. Quel est le taux effectif de ce placement ?

$$T = \frac{t}{1 - \frac{t \cdot n}{36000}} \Rightarrow T = \frac{10}{1 - \frac{10 \times 6}{1200}} = 10{,}526\%$$

4. Escompte

4.1. Définition :

Un effet de commerce (Lettre de change ou billet à ordre) constate l'engagement pris par un débiteur de payer à son créancier à une date déterminée une somme d'argent, montant de la dette qu'il a contractée.

Si le créancier a besoin de cet argent (Liquidités) avant l'échéance stipulée, il cédera l'effet de commerce, avec tous les droits qui s'y attachent, à une banque, suivant la technique de l'escompte : le banquier escompteur achète l'effet et se substitue au créancier, le créditeur paiera au banquier le montant de sa dette à l'échéance fixée. Le banquier verse, par avance, au créancier la somme qui lui est due, mais avec des intérêts en moins comme prix du service rendu.

Ce moyen de financement qui permet aux entreprises de disposer du montant de leurs créances avant leur échéance constitue une «mobilisation de créances».

4.2. Les agios d'escompte :

Les agios comptent l'escompte proprement dit, augmenté des différentes commissions et de la taxe sur la valeur ajoutée.

4.2.1. L'escompte commercial :

L'escompte commercial est l'intérêt de la valeur nominale de l'effet, calculé au taux d'escompte en fonction de la durée qui sépare le jour de la négociation (remise de l'effet à la banque) du jour de l'échéance, l'année financière étant comptée pour 360 jours.

Soient :
- VN : La valeur nominale de l'effet (valeur portée sur l'effet).
- t : Le taux d'escompte.
- E : Le montant de l'escompte commercial.
- VA : La valeur actuelle de l'effet.

$$\boxed{E = VN \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360}} \quad D'\text{où on déduit} \quad \boxed{VA = VN - E}$$

Exemple :

Un commerçant négocie une traite de 8240 DH, payable dans 55 jours avec un taux d'escompte 12%.

Date de négociation   Echéance

$Valeur\ actuelle$ - - - - - - - - - - - - - - Après 55j - - - - - - - - - - - - - -► $Valeur\ nominale$ $8240\ DH$

$$E = 8240 \times \frac{12}{100} \times \frac{55}{360} \Rightarrow E = 151{,}07\ DH$$

La différence entre la valeur nominale et l'escompte s'appelle la valeur actuelle de l'effet :

$$VA = 8240 - 151{,}07 \Rightarrow VA = 8088{,}93\ DH$$

4.2.2. Les commissions :

Proportionnelles ou fixes, elles permettent à la banque de récupérer ses frais et de rétribuer les services qu'elle rend.

4.2.3. Taxe sur les agios :

La taxe sur la valeur ajoutée (T.V.A) est exprimée en pourcentage calculé sur l'agio hors taxe. Elle s'ajoute à ce dernier pour constituer l'agio taxe comprise (taux en vigueur est 10%).

Ainsi :

$\boxed{\boldsymbol{Agio = escompte + commission + taxe}}$ On déduit $\boxed{\boldsymbol{Valeur\ nette = valeur\ nominale - agio}}$

4.3. Taux réel de l'agio :

4.3.1. Définition :

Le taux réel de l'agio est le taux unique qui, par sa seule utilisation permettrait d'obtenir directement le montant de l'agio, les diverses commissions et taxes ont pour effet d'aggraver le taux nominal d'escompte supporté par l'entreprise auprès de sa banque.

$$T_R = \frac{Agio \times 36000}{Valeur\ nominale \times La\ durée\ réelle}$$

4.3.2. Principe de calcul :

a) Calculer le montant total de l'agio. (Ensemble de retenus)

b) Déterminer le taux réel x de l'opération d'escompte.

Exemple :

Un effet de 6600 DH, ayant 60 jours à courir, est négocié au taux de 6%. Il supporte un change de place (Dans une autre ville) de 0,5% et une commission supplémentaire de 0,25%.

Solution :

a) Calcul de l'agio :

$$Calcul\ de\ l'escompte : E = 6600 \times \frac{6}{100} \times \frac{60}{360} = 66\ DH$$

$$Change\ de\ place : 6600 \times \frac{0{,}5}{100} = 33\ DH$$

$$Commission\ sup : \quad 6600 \times \frac{0{,}25}{1000} = 1{,}65\ DH$$

$$\Rightarrow Agio = 66 + 33 + 1{,}65 = 100{,}65\ DH$$

b) Calcul du taux réel de l'agio :

$$6600 \times \frac{x}{100} \times \frac{60}{360} = 100{,}65\ DH \Rightarrow x = 9{,}15\%$$

➔ Le taux nominal d'escompte (6%) se trouve aggravé de $3{,}15\%$.

4.4. Le taux de revient pour le vendeur d'un effet :

4.4.1. Définition :

Compte tenu de la somme effectivement prêtée (à une date connue) et la somme effectivement remboursée (à une date déterminée), le taux de revient pour l'entreprise ou le commerçant qui négocie un ou plusieurs effets est le taux réel du crédit ainsi obtenu pendant un nombre précis de jours.

$$T_{Rv} = \frac{Agio \times 36000}{Valeur\ nette \times La\ durée\ réelle}$$

4.4.2. Principe de calcul :

a) Calculer le montant total de l'agio.

b) En déduire la somme effectivement prêtée (valeur nette) = valeur nominale – agio.

c) Déterminer le taux réel du crédit.

Exemple :

Un effet de 24800 DH, ayant 50 jours à courir, est négocié aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : $4{,}5\%$
- Change de place : $0{,}5\%$
- Commissions supplémentaires : 1%
- Commission de manipulation $2\ DH\ par\ effet$
- Commission d'endossement : $2\%\ l'an$, payable pour un nombre de mois entier

Calculer le taux revient pour le commerçant ?

Solution :

a) Calcul de l'agio :

- Montant de l'escompte : $24800 \times \frac{4,5}{100} \times \frac{50}{360} = 155$ DH

- Change de place : $24800 \times \frac{0,5}{1000} = 12,40$ DH

- Commission de manipulation (1 effet) : 2 DH

- Commission d'endossement (calculée sur 2 mois): $24800 \times \frac{2}{100} \times \frac{2}{12} = 82,67$ DH

- Commission supplémentaire : $24800 \times \frac{1}{1000} = 24,80$ DH

$$\text{Agio} = 155 + 12,40 + 2 + 82,67 + 24,80 = 276,87 \text{ DH}$$

b) Valeur nette (somme effectivement prêtée) :

$$24800 - 276,87 = 24523,13 \text{ DH}$$

c) Calcul du taux de revient pour le commerçant qui a négocié l'effet :

$$24523,13 \times \frac{x}{100} \times \frac{50}{360} = 276,87 \Rightarrow x = 8,13\%$$

4.5. Taux de rendement pour le banquier escompteur (ou taux de placement) :

4.5.1. Définition :

Il s'agit du taux qui résulte la somme effectivement prêtée et du gain net effectif procuré par l'opération d'escompte.

$$T_P = \frac{(\text{Agio HT} - \text{commisions de service}) \times 36000}{\text{Valeur nette} \times \text{La durée réelle}}$$

4.5.2. Principe de calcul

a) Calculer le gain net, compte tenu de la récupération plus ou moins importante des frais réellement engagés.

b) Déterminer le taux de rendement résultant de la somme effectivement prêtée, de la durée exacte du prêt et du gain effectif.

Exemple :

La BMCE escompte un effet de 12600 DH, payable dans 50 jours, au taux de 4,5%. Les commissions perçues équivalent à une récupération de frais réellement engagés.

Quel est le taux de rendement ?

Solution :

a) Montant de l'escompte :

$$12600 \times \frac{4,5}{1000} \times \frac{50}{360} = 78,75 \text{ DH (gain net)}$$

b) Valeur actuelle :

$$\text{a} = 12600 - 78,75 = 12521,25 \text{ DH}$$

c) Calcul du taux de rendement :

$$12521,25 \times \frac{x}{100} \times \frac{50}{360} = 78,75 \Rightarrow x = 4,53\%$$

4.6. Exercices d'application :

Un commerçant dispose d'une lettre de change tirée sur l'un de ses clients ; son échéance est le 31/07/N. La valeur nominale de cet effet est de 20 000 DH. Rencontrant des problèmes de trésorerie, le commerçant décide de remettre à l'escompte la lettre de change en date du 02/04/N.

Conditions de la banque :

- Taux d'escompte : 8 %
- Taux d'endossement : 1 % (dépendant du temps)
- Commission fixe par effet (hors taxes) : 30 DH
- Taux de TVA applicable : 10 %
- Calcul du nombre de jours : de la date de l'escompte à la date d'échéance en prenant en compte le nombre réel de jours
- Jour de banque : prise en compte d'un jour de banque obligatoire
- Calculer le montant de l'escompte, le montant des agios, le net porté en compte et le taux réel d'escompte

4.7. Bordereau d'escompte :

Exemple :

Etablir le bordereau des effets présentés à l'escompte à la banque, le 8 Mai 2022 aux conditions ci-après :

- taux d'escompte : 10% jusqu'à 90j et 12% au-delà
- commission d'acceptation : 1,54 DH pour les effets de plus de 60 jours
- minimum de jours d'escompte : 15 jours
- commission de manipulation 2 DH par effet

TVA : 10% sur agio H.T

Effets :

1er de	6200 DH	sur Rabat	au	13 Juin 2022
2ème de	8720 DH	sur Meknés	au	15 Mai 2022
3ème de	1210 DH	sur Fés	au	10 Juillet 2022
4ème de	87200 DH	sur Oujda	au	25 Août 2022
5ème de	6500 DH	sur Khénifra	au	30 Septembre 2022
6ème de	14600 DH	sur Casa	au	25 Septembre 2022

Solution :

Le bordereau :

N°	Lieu de paiement	Nominal	Echéance	Jours	Escompte
1	Rabat	6200,00	13/06/2022	36	62,00
2	Meknés	8720,00	15/05/2022	7	36,33
3	Fés	1210,00	10/07/2022	63	21,18
4	Oujda	8720,00	25/08/2022	109	316,83
5	Khénifra	6500,00	30/09/2022	145	314,17
6	Casa	14600,00	25/09/2022	140	681,33
		45950,00	Escompte :		1 431,84
			Commission de manipulation 2x6 :		12,00
			Commission d'acceptation 1,54x4 :		6,16
			Agio H.T		1 450,00
			T.V.A : 1450 x 10%		145,00
			Agio T TC :		1 595,00
			Valeur Nette		44 355,00

B. S’APPROPRIER LES BASES DES INTERETS COMPOSES

1. L’intérêt composé

1.1 Principe et champ d’application

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu’à l’issue de chaque période de placement, les intérêts sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d’une capitalisation des intérêts.

Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.

1.2 Calcul pratique

Soit,

C_0 : le capital initial

i : le taux d’intérêt par période pour une durée d’un an

N : nombre de période de placement

C_n : la valeur acquise par le capital C_0 pendant n périodes

Le tableau qui suit présente la méthode de calcul des intérêts et la valeur acquise à la fin de chaque année :

Période (année)	Capital début de la période	L’intérêt de l’année	Valeur acquise par le capital en fin de période après prise en considération des intérêts
1	C_0	C_0 i	$C_0 + C_0.i = C_0 (1+ i)$
2	$C_0 (1+ i)$	$C_0 (1+ i)$ i	$C_0 (1+ i) + C_0 (1+ i).i = C_0 (1+ i)^2$
3	$C_0 (1+ i)^2$	$C_0 (1+ i)^2$ i	$C_0 (1+ i)^2 + C_0 (1+ i)^2.i = C_0 (1+ i)^3$
:			
n - 1	$C_0 (1+ i)^{n-2}$	$C_0 (1+ i)^{n-2}$ i	$C_0 (1+ i)^{n-2} + C_0 (1+ i)^{n-2}.i = C_0 (1+ i)^{n-1}$
n	$C_0 (1+ i)^{n-1}$	$C_0 (1+ i)^{n-1}$ i	$C_0 (1+ i)^{n-1} + C_0 (1+ i)^{n-1}.i = C_0 (1+ i)^n$

La valeur acquise par le capital C0 à la fin de n périodes au taux i est donc donnée par la formule suivante :

$$\boxed{C_n = C_0 \times (1 + i)^n}$$

<u>Remarque :</u>

La formule C_n = C0*(1 +i)^n n’est applicable que si le taux d’intérêt i et la durée n sont homogènes, c.à.d. exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation

Si par exemple, il est convenu entre le prêteur et l'emprunteur que les intérêts doivent être capitalisés à la fin de chaque mois, la formule ne sera applicable que si le taux d'intérêt est mensuel et que la durée de placement est exprimée en mois.

Exemple :

Une somme de 10 000 Dh est placée pendant 5ans au taux annuel de 10%.

1) Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?
2) Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 20 000Dh, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?
3) Si la somme placée aujourd'hui est de 10 000 Dh, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 23 580 Dh ?
4) Si au bout de 5ans la valeur acquise du placement est de 17 821 Dh à quel taux le placement a été effectué **?**

Solution :

1. Valeur acquise :

$$Cn = C_0 \times (1 + i)^n$$
$$C_5 = 10\,000 \times (1 + 0{,}1)^5$$
$$C_5 = \mathbf{16\,105, 10\ DH}$$

2. Valeurs actuelle correspondante à une valeur acquise de 20 000 Dh

$$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$$
$$\Rightarrow C_0 = C_n \times (1 + i)^{-n}$$
$$C_0 = 20000 \times (1 + 0{,}1)^{-5}$$
$$C_0 = \mathbf{12\,418, 43\ DH}$$

3. Durée de placement

$$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$$
$$\Rightarrow log(C_n) = log(C_o) + n \times log(1 + i)$$
$$N = \frac{log(C_n) - log(C_0)}{log(1 + i)}$$

4.

$$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$$
$$\Rightarrow (1 + i)^n = \frac{C_n}{C_0}$$
$$\Rightarrow i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{n^{-1}} - 1$$
$$\Rightarrow i = 12{,}25\%$$

2. **Taux proportionnel et Taux équivalent**

2.1 Taux proportionnel

Deux taux sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport des durées de leurs périodes respectives.

Aux taux annuel de **10%**, par exemple, correspond le taux semestriel proportionnel de **5%** et le taux trimestriel proportionnel de **2,5%.**

Taux en %	Durée en mois	Rapport
10 / 5	12 / 6	2
10/2,5	12/ 3	4

En intérêts simple deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps.

Période de placement	Taux	Valeur acquise
1 Année	10%	$10\,000 + 10\,000 \times 0{,}10 = 11\,000$ DH
2 Semestres	5%	$10\,000 + 10\,000 \times 0{,}05 \times 2 = 11\,000$ DH
4 Trimestres	2,5%	$10\,000 + 10\,000 \times 0{,}025 \times 4 = 11\,000$ DH

En intérêt composé et à taux proportionnels les valeurs acquises par un même capital pendant la $n^{\text{ème}}$ période augmentent quand les périodes de capitalisation deviennent plus petites. D'où l'utilisation des taux équivalents.

Période de placement	Taux	Valeur acquise
1 Année	10%	$10\,000 \times (1{,}10)^1 = 11\,000$ DH
2 Semestres	5%	$10\,000 \times (1{,}05)^2 = 11\,025$ DH
4 Trimestres	2,5%	$10\,000 \times (1{,}025)^4 = 11\,038{,}13$ DH

Généralisation pour une période de placement d'un an :

	T_A	T_S	T_T	T_M
T_{Ap}		2	4	12
T_{Sp}	1/2		2	6
T_{Tp}	1/4	1/2		3
T_{Mp}	1/12	1/6	1/3	

2.2 Taux équivalent

Deux taux sont équivalents lorsque, à intérêts composés, ils aboutissent pour un même capital, à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.

Prenons l'exemple précédent :

- Le capital est de 10 000 DH
- Le taux est de 10%
- La durée est d'une année

Au bout d'une année la valeur acquise est : $10\,000 * (1 + 0{,}10)^1 = 11\,000$

Si T_s est le Taux semestriel équivalent alors

$$10\,000 \times (1 + T_s)^2 = 10\,000 \times (1{,}10)^1$$

$$(1 + T_s)^2 = (1{,}10)^1$$

$$(1 + T_s) = (1{,}10)^{1/2}$$

$$T^s = (1{,}10)^{1/2} - 1 = 0{,}0488088 \qquad soit : \qquad \mathbf{T_s = 4,88\%}$$

Ainsi, 4,88% est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10%.

De la même manière, on peut calculer le taux trimestriel équivalent et le taux mensuel équivalent :

$$\boldsymbol{T_{Tr}} \ = \ \mathbf{2,1}\% \qquad \mathbf{T_M} \ = \ \mathbf{0,797}\%$$

Généralisation pour une période de placement d'une année :

Soient :C_0 : le capital placé

T_A : le taux Annuel à 1 DH

Ts : le taux semestriel à 1 DH

T_T : le taux Trimestriel à 1 DH

T_M: le taux Mensuel à 1 DH

Le taux semestriel équivalent : $\mathbf{T_s = (1 + T_A)^{\frac{1}{2}} - 1}$

Le taux Trimestriel équivalent : $\boldsymbol{T_T = (1 + T_A)^{\frac{1}{4}} - 1}$

Le taux Mensuel équivalent : $\boldsymbol{T_M = (1 + T_A)^{\frac{1}{12}} - 1}$

D'une manière générale pour le cas de deux placements définis respectivement par leur taux T_1 et T_2 et par leurs périodes p_1 et p_2 les placements sont effectués à taux équivalents s'ils aboutissent, pour un même capital, à la même valeur acquise, ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{T_1 = (1 + T_2)^{\frac{p_2}{p_1}} - 1} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{T_2 = (1 + T_1)^{\frac{p_1}{p_2}} - 1}$$

Généralisation pour une période de placement d'un an :

	T_A	T_S	T_T	T_M
T_{AE}		$(1+t_s)^2-1$	$(1+t_T)^4-1$	$(1+t_n)^{12}-1$
T_{SE}	$(1+t_A)^{\frac{1}{2}}-1$		$(1+t_T)^2-1$	$(1+t_n)^6-1$
T_{TE}	$(1+t_A)^{\frac{1}{4}}-1$	$(1+t_s)^{\frac{1}{2}}-1$		$(1+t_M)^3-1$
T_{ME}	$(1+t_A)^{\frac{1}{12}}-1$	$(1+t_S)^{\frac{1}{6}}-1$	$(1+t_T)^{\frac{1}{3}}-1$	

<u>Exemples :</u>

1. Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 9% ?

$$\boldsymbol{T_s = 44\%}$$

2. Quel est le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 9% ?

$$\boldsymbol{T_T = 2,18\%}$$

3. Quel est le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9% ?

$$\boldsymbol{T_M = 0,975\%}$$

Exercice :

On place un capital de 15000 Dhs pendant 4 ans, au taux annuel de 9%. Calculer sa valeur acquise si la période de capitalisation est

- ✓ **Le semestre, l**
- ✓ **Le trimestre,**

1. **En utilisant les taux proportionnels**
2. **En utilisant les taux d'équivalence**

Exercice : le temps de placement n'est pas un nombre entier

Une somme de 18 700 Dhs est placée à intérêts composés au taux annuel de 6%. Quelle est la valeur acquise au bout de 4ans et 5mois ?

1. **Solution rationnelle : considère la valeur acquise au bout de 4ans reste placée à intérêts simples pendant 5mois :**
2. **Solution commerciale : la période de placement est égale à 4+5/12**

Solution

1. Solution rationnelle :

Valeur acquise au bout de 4 Ans et 5mois	=	Valeur acquise au bout de 4 Ans	+	Intérêts simples produits pendant les 5 derniers mois

Valeur acquise au bout de 4ans :

$18700 \times (1{,}06)^4 = 18700 \times 1{,}262\,476\,96 = 23\,608{,}32\ DH.$

Intérêts simples rapportés en 5 mois :

$23\,608{,}32 \times 0{,}06 \times 5/12 = 590{,}21\ DH.$

Valeur acquise au bout de 4ans et 5 mois : $23\,608{,}32 + 590{,}21 = 24\,198\,,53\ DH.$

2. Solution commerciale :

Convertir la durée en année :

$$Na = 4ans\ et\ 5\ mois = 4ans\ et\ 5/12\ ans = 53/12\ ans$$

$$Valeur\ acquise = 18700 \times (1{,}06)^{53/12} = 24\,188{,}51\ DH$$

Exercice :

Donner la valeur acquise par un capital de 160 000 DH au bout de 3ans et 4mois, à un taux annuel de 9,25 % ?

1. **En utilisant la solution rationnelle**
2. **En utilisant la solution commerciale.**

Exercice :

Même question que l'exercice précédent avec un capital de 18 000 DH payables dans 13 ans 2 semestres et 2mois, le taux est de 9%.

Exercice :

Un capital de 388 000 DH est payable le 31/12/2005. Donner sa valeur au :

- **Le 31/12/2008**
- **Le 31/12/16**
- **Le 31/12/2021**

Taux d'intérêts composés annuel 9%.

Exercice :

Combien de temps faut-il pour qu'une somme placée à intérêts composés au taux annuel de 7,5%, soit doublée ?

$$C_n = c_0 \times (1+t)^n$$

$$2 \times c_0 = c_0 \times (1+t)^n$$

$$2 = (1+t)^n$$

$$Log(2) = n\, log\,(1+t)$$

Exercice :

A quel taux annuel d'intérêts composés faut-il capitaliser un capital pour tripler sa valeur au bout de 9ans ?

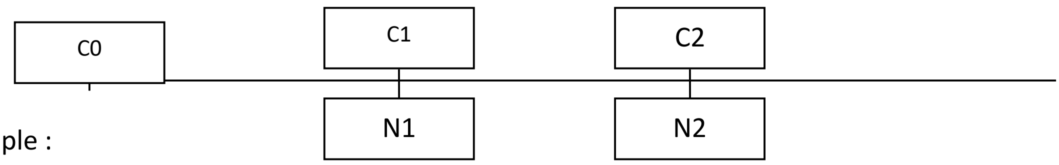
3. Equivalence à Intérêt composés

3.1 Équivalence de deux capitaux :

Deux capitaux (ou effets) sont équivalents à intérêts composés à une date donnée, si escomptés à intérêts composés et au même taux, ils ont à cette date la même valeur actuelle.

Si C1 et C2 sont deux effets payables dans n1 et n2 périodes et escomptés à un taux t par période. C1 et C2 sont équivalents si et seulement si :

$$C_1 \times (1+t)^{-n1} = C_2 \times (1+t)^{-n2}$$



Exemple :

Un effet de 12 500 DH échéant dans 3ans doit être remplacé par un autre effet de 7ans. Calculer la valeur nominale C de l'effet de remplacement avec un taux d'escompte de 13%.
A la date d'équivalence, l'égalité s'écrit :

$$12\,500 \times (1{,}13)^{-3} = C \times (1{,}13)^{-7}$$

$$Ce\ qui\ donne : C = 20380{,}92\ DH$$

A l'époque 0, les deux capitaux 12500 DH et 20380,92 DH ont la même valeur actuelle, à taux d'escompte de 13%.

$$\boxed{\mathbf{C0 = 8\,663,13\ DH}}$$

D'une manière générale, en matière d'intérêts composés, si deux capitaux sont équivalents à une date, ils sont équivalents à toute autre date. L'équivalence de capitaux à intérêts composés est indépendante de la date d'équivalence. Il convient donc de choisir la date la plus favorable au calcul.

Reprenons l'exemple précèdent et modifiant la date d'équivalence :

$$12\,500 \times (1{,}13)^{-2} \;=\; C \times (1{,}13)^{-6} \rightarrow \;\; C \;=\; 20380{,}92\ DH$$

3.2 Équivalence de plusieurs capitaux :

Un capital est équivalent, à intérêts composés et à une date donnée, à un groupe de capitaux, si au même taux d'escompte, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles de l'ensemble du groupe de capitaux.

Exemple :

On souhaite remplacer trois effets suivants :

- **12000 DH dans 2 Ans**
- **15000 DH dans 6 Ans**
- **18000 DH dans 4 Ans**

Par un effet unique de nominal *C payable dans 5ans. Taux et de 11%.*

Calculer la valeur nominale de ce capital.

Solution :

A l'époque 0, l'égalité d'équivalence s'écrit :

$$C \times (1{,}11)^{-5} \;= 12000 \times (1{,}11)^{-2} + 18000 \times (1{,}11)^{-4} + 15000 \times (1{,}11)^{-6}$$

$$C * (1{,}11)^{-5} \;= 29\,616{,}24$$

$$\boxed{C \;=\; 49\,905{,}09\ DH}$$

3.3 Echéance commune et échéance moyenne :

Il s'agit du problème de remplacement d'un groupe de capitaux (ou d'effets) par un seul capital.

- Si la valeur nominale du capital unique est différente de la somme des valeurs nominales des capitaux remplacés, il s'agit de l'échéance commune ou l'échéance unique
- Si la valeur nominale du capital unique est égale à la somme des valeurs nominales des capitaux remplacés, il s'agit de l'échéance moyenne.

Exemple : Cas de l'échéance commune

Un créancier accepte que son débiteur remplace trois dettes

- ***15000 DH dans 2 Ans***
- ***20000 DH dans 3 Ans***
- ***35000 DH dans 5 Ans***

Par un versement unique de 70 800 DH, Taux d'escompte de 10,5%.

Déterminer l'échéance de ce paiement :

Il s'agit d'une échéance commune puisque :

$$70\,800 \;<>\; 15000 \;+\; 20000 \;+\; 35000$$

Si x est l'échéance du paiement unique, par rapport à l'époque 0, alors :

$$70\,800 \;\times (1{,}105)^{-x} = \;15000 \times (1{,}105)^{-2} \;+\; 20000 \times (1{,}105)^{-3} \;+\; 35000 \times (1{,}105)^{-5}$$

$$70\,800 \;\times (1{,}105)^{-x} = \;12\,284{,}76 \;+\; 14\,823{,}24 \;+\; 21\,244{,}99 \;=\; 48\,352{,}99$$

$$(1{,}105)^{-x} = 48\,352{,}99 \,/\, 70\,800 = 0{,}682952$$

Par les logarithmes :

$$x \times log(1{,}105) = log\,(0{,}682952) \rightarrow x = log\,(0{,}682952) \,/\, log(1{,}105)$$

$$\rightarrow \boxed{x = 3{,}819214\, années}$$

Le paiement unique de 70800 DH sera effectué dans 3ans 9mois et 25 jours.

<u>Exemple : Cas de l'échéance moyenne</u>

Il suffit de remplacer les trois effets par un seul dont la valeur nominale est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés : $15000 + 20000 + 35000 = 70\,000\, DH$

$$\rightarrow \boxed{x = 3\,,705403\, années}$$

La date de l'échéance moyenne est dans 3ans 8 mois et 14 jours

3.4 Évaluation d'un capital à une date donnée

Un capital C_n payable à l'époque n peut être facilement évalué à n'importe quelle autre date.

$$\boldsymbol{C_P = C_n \times (1+t)^{-(n-p)}}$$ **et** $$\boldsymbol{C_p = C_n \times (1+t)^{p-n}}$$

Exercice :

Une personne doit régler C=75 000 Dh dans 4 ans combien paierait – elle si elle réglait sa dette :

- ***Dans 2 ans : C_2 = 65 507,91 DH***
- ***Dans 7ans : C_7 = 91 878,22 DH***

Le taux est de 7%

C. S'APPROPRIER LES BASES DES ANNUITES

1. Problématique :

Comment peut-on résoudre les problèmes liés :

- Aux emprunts (remboursement de crédits) ;
- Aux placements (constitution d'un C. retraite) ;
- À la rentabilité d'un investissement.

2. Définition des annuités

Une suite d'annuités correspond à une suite de paiements périodiques. Il faut parler d'annuités dans le cas de périodes annuelles, de semestrialités dans le cas de périodes semestrielles et de mensualités en cas de périodes mensuelles.

Ces paiements peuvent être destinés :

- soit à se constituer un capital (placements sur un livret, assurance-vie, etc.) ;
- soit à rembourser un emprunt (emprunt indivis ou obligataire).

Les annuités s'étalent en général sur une période de plusieurs années (long terme) ; il convient donc de raisonner à intérêts composés.

Nous utiliserons la formule de la valeur acquise pour nous constituer un capital et celle de la valeur actuelle pour rembourser un emprunt.

Il faut utiliser les formules ci-dessous à intérêts composés :

$$Avec : V_n = valeur\ acquise\ ;\ t = taux\ d'intérêt\ ;\ n = durée\ ;\ a = annuités.$$

$$\boxed{Valeur\ acquise : V_n = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

<u>Exemple d'application :</u>

1) On place **5 000 DH** par an, du **1Er janvier N** au **1Er janvier N+7**, au taux de **6 %** l'an. Quelle somme obtiendra-t-on le **1Er janvier N+7 ?**

$$\boxed{Valeur\ acquise : V_7 = 5000 \times \frac{(1{,}06)^8 - 1}{0{,}06} = 49\ 487 DH}$$

2) Quelle somme faut-il placer chaque année pendant **6 ans** pour rembourser un emprunt de **800 000 DH** contracté aujourd'hui ? Le taux d'intérêt annuel est de **4 %**.

$$\boxed{Valeur\ à\ verser : a = \frac{V_n \times t}{(1+t)^n - 1}}$$

Annuité à verser pendant $\mathbf{6\ ans = 120\ 610\ DH}$

3) Calculer la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de **15 annuités** de **35 000 DH** chacune. Déduire les intérêts produits par les différents versements. Taux : **10% l'an**

$$\boxed{Valeur\ acquise\ An = 1\ 112\ 036{,}86\ DH}$$

$$\boxed{Intérêt\ produit\ i = 587\ 036{,}86\ DH}$$

4) Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant **8 ans**, pour construire au moment du dernier versement, un capital de **450 000 DH**. **Taux semestriel** est de **4,5**

$$Valeur\ à\ verser : a = \frac{V_n \times t}{(1+t)^n - 1}$$

$$a = 19\,806{,}92\ DH$$

5) Par le versement de 10 annuités de 18 000 DH chacune, on constitue au moment du dernier versement, un capital de 300 000 DH. Trouver le taux de capitalisation (interpolation linéaire)

$$t = 10{,}93\%$$

3. Valeur Acquise par une suite d'annuités constantes à une date postérieure du dernier versement

Ici, le versement de la dernière annuité a un sens puisque celle-ci rapporte, au même titre que les autres annuités, des intérêts. Pour le calcul de la valeur acquise il est important de situer, d'abord, au moment du dernier versement, ensuite, on utilise, suivant les cas, soit les intérêts simples, soit les intérêts composés.

Exemples d'application

1) Une personne place auprès d'un organisme la capitalisation des annuités de ***25 000 DH*** chacune. Taux ***10,5%*** l'an. Date du 1er versement ***31/12/2004***. Date du dernier versement est le ***31/12/2014***. Calculer le capital constitué au :

- 31/12/2014
- 31/05/2015 (2)
- 31/12/2016
- 31/05/2017 (2)

Solution :

- Au 31/12/2014 on applique directement la formule de capitalisation :

$$Valeur\ acquise : V_n = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$Valeur\ acquise\ A_{11} = 475\,966{,}51\ DH$$

- Au 31/05/2015 : la valeur acquise $\mathbf{A_{11}}$ sera capitalisée durant 5 mois après le dernier versement

Solution *rationnelle* :

$$Valeur\ acquise\ C_{11\,(5/12)} = 496\,790{,}00\ DH$$

Solution commerciale :

$$Valeur\ acquise\ C_{11\,(5/12)} = 496\,185{,}43\ DH$$

- 31/12/2015 : Ici la valeur acquise **A_{11}** sera capitalisée durant 1 an

$$Valeur\ acquise\ C_{12} = A_{11} \times 1{,}105 = 525\ 942{,}99\ DH$$

- Au 31/05/2017 : la valeur acquise **A_{11}** sera capitalisée durant 2 ans 5 mois après le dernier versement

<u>Solution rationnelle :</u>

$$Valeur\ acquise\ C_{13\,(5/12)} = 606\ 593{,}00\ DH$$

<u>Solution commerciale :</u>

$$Valeur\ acquise\ C13\ (5/12) = 605\ 854{,}82\ DH$$

2) Un capital de **300 000 DH** doit être constitué, deux ans après le dernier terme, par le versement de **10 annuités** de montant ''**a**'' chacune. Taux : **9,5 %** l'an. Calculer la valeur de l'annuité « **a** »

   <u>Solution :</u>

$$Capital = A_n \times (1+t)^2$$

$$Valeur\ acquise : V_n = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$a = 16\ 079{,}60\ DH$$

4. Cas où le taux ne correspond pas à la période

Ici on utilise soit les taux proportionnels, soit les taux d'équivalents.

<u>Exemple d'application</u>

1) Un particulier place, auprès d'un organisme de capitalisation, **40 trimestrialités** de montant **10 000 DH** chacune. Taux : **9%** l'an. Calculer le capital constitué au moment du dernier versement.

<u>Solution :</u>

Taux : **9 %** l'an

- Utilisation des taux proportionnels : $t_{tr} = 2{,}25\%$

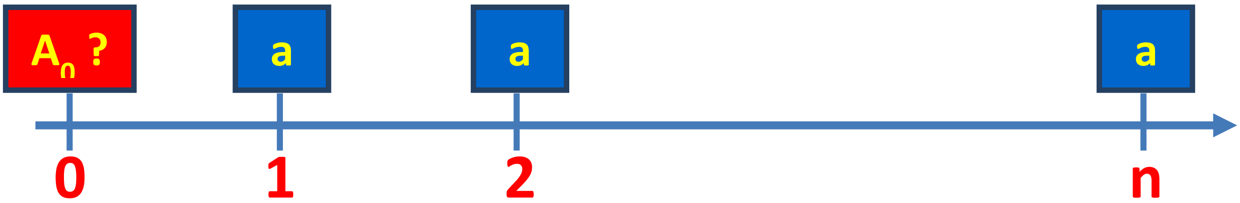
$$Valeur\ acquise\ A_{40} = 637\ 861{,}76\ DH$$

- Utilisation des taux équivalents **:** $t_{tr} = 2{,}18\%$

$$Valeur\ acquise\ A_{40} = 628\ 159{,}00\ DH$$

5. Valeur actuelle à l'origine

Ici, on cherche à évaluer la suite d'annuité à la date 0 (C.à.d. à l'origine de la suite)



$Avec : V_0 = valeur\ actuelle\ à\ l'origine\ ;\ t = taux\ d'intérêt\ ;\ n = durée\ ;\ a = annuités.$

$$Valeur\ actuelle : V_0 = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

<u>**Exemple d'application**</u>

1. Calculer la valeur à l'origine d'une suite de **12 annuités** de **32 500 DH** chacun. Taux d'escompte **8,5% l'an**. Calculer les intérêts générés à l'occasion de cette opération d'escompte.

<u>**Solution :**</u>

Calcul la valeur actuelle à l'origine :

$$Valeur\ à\ l'origine\ A_0 = 238\ 702{,}30\ DH$$

Intérêts générés calculés à base des intérêts composés :

$$Intérêt\ généré\ i_{ic} = 396\ 648{,}32\ DH$$

Intérêts générés calculés à base des annuités :

$$Intérêt\ généré\ i_{ann} = 245\ 350{,}62\ DH$$

2. Soit une suite de 5 versements annuels à terme échu :

- le premier de 50 000 le 01.01.n+1
- le second de 10 000,
- les troisième et quatrième de 5 000
- le dernier de 15 000.

Déterminer la valeur actualisée au taux de 3% annuel au 01.01.n.

<u>**Solution :**</u>

- Calcul la valeur actuelle à l'origine pour des versements fin de période :

D'abord on doit calculer la valeur acquise de la suite des annuités

$$\mathbf{An} = \mathbf{50000} \times (\mathbf{1,03})^{(4)} + \mathbf{10000} \times \mathbf{1,03}^{(3)} + \mathbf{5000} \times (\mathbf{1,03})^{(2)} + \mathbf{5000} \times (\mathbf{1,03})^{(1)} + \mathbf{15\ 000} \times (\mathbf{1,03})^{(0)}$$

$$\boldsymbol{Valeur\ acquise\ A_n = 92\ 657,21DH \rightarrow Valeur\ actuelle\ à\ l'origine\ A_0 = A_n * 1,03^{(-5)}}$$

$$Valeur\ à\ l'origine\ A_0 = 238\ 702{,}30\ DH$$

6. Annuités avec progression arithmétique et géométrique

6.1 Annuités avec progression arithmétique

Les formules de calcul de la valeur acquise et de la valeur à l'origine dans le cas d'annuités avec progression arithmétique sont comme suit :

$a :$ *première annuité*

$i :$ *taux par période*

$n :$ *nombre de périodes*

$r :$ *raison de la progression arithmétique*

$V_o = $ *Valeur d'origine*

$V_n = $ *valeur acquise*

$$Valeur\ acquise :: V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

$$Valeur\ actuelle :: V_0 = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i} + nr\right) - \frac{nr}{i}$$

6.2 Annuités avec progression géométrique

$a :$ *première annuité*

$i :$ *taux par période*

$n :$ *nombre de périodes*

$q :$ *raison de la progression géométrique*

$V_o = $ *Valeur d'origine*

$V_n = $ *valeur acquise*

$$Valeur\ acquise :: V_n = a\ \frac{(1+i)^n - q^n}{1 + i - q}$$

$$Valeur\ actuelle : V_0 = a\ \frac{(1+i)^n - q^n}{1 + i - q}\ (1 + j)^{-n}$$

D. S'APPROPRIER LES BASES DES EMPRUNTS INDIVIS

LES EMPRUNTS

Dans la littérature, il existe deux grandes familles d'emprunts :

- Les emprunts indivis ;
- Les emprunts obligataires ;

L'emprunt indivis, ou ordinaire est celui qui est contracté auprès d'un seulemprunteur : banque, établissement financier,

L'emprunt obligataire comporte, lui plusieurs prêteurs dénommés les obligataires.

1. Les emprunts indivis

Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis. Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments :

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

Tableau d'amortissement

Le remboursement d'un emprunt (ou service de la dette) peut être :

- Identique d'une période à une autre. La somme des intérêts et de l'amortissement étant égale, les annuités sont dites « constantes » ;
- Variable d'une échéance à une autre, cette variation provient généralement des intérêts, qui tendent à décroître à mesure que s'opèrent les remboursements constants ;
- Unique, les emprunts de ce type comportent deux variantes :
  - L'*in fine* absolu, dont le service est unique. L'emprunteur rembourse le capital et les intérêts au dernier terme ;
  - L'*in fine* relatif, dont le service périodique est réduit au paiementdes intérêts jusqu'au dernier terme où le débiteur rembourse le capital emprunté en sus des intérêts.

Les relations entre les différentes variables de l'emprunt indivis sont décrites par letableau d'amortissement suivant.

Ces relations sont vérifiées quelle que soit l'hypothèse de remboursement adoptée :annuités constantes, amortissement constants ou *in fine ;*

Années	Dette en début d'année (1)	Intérêt del'année (2) = (1). *I*	Amortissem entde l'année (3)	Annuités	Dette au terme de l'année (5) = (1)-(3)
1	D_0	$D_0 \cdot i$	m_1	$a_1 = D_0 . i + m_1$	$D_1 = D_0 - m_1$
2	D_1	$D_1 \cdot i$	m_2	$a_2 = D_1 + m_2$	$D_2 = D_1 - m_2$
.					
.					
P	D_{p-1}	$D_{p-1} \cdot i$	m_p	$a_p = D_{p-1} . i + m_p$	$D_p = D_{p-1} - m_p$
.					
n-1	D_{n-2}	$D_{n-2} \cdot i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2} . i + m_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1} \cdot i$	m_n	$a_n = D_{n-1} . i + m_n$	$D_n = D_{n-1} - m_n = 0$

Propriétés générales

Le tableau recèle cinq propriétés :

P1 : relation entre capital emprunté et annuités.

Cette propriété exprime l'équivalence à l'origine (instant zéro) entre le capitalemprunté et les anuités versées :

$$D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots + a_p(1+i)^{-p} + \cdots + a_n(1+i)^{-n}$$

P2 : relation entre capital emprunté et amortissements.

La somme des termes de la colonne (3) est égale au capital emprunté :

$$D_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

$$D_0 = \sum m_k \ (de\ k = 1 \text{ à } n)$$

P3 : relation entre le solde de l'emprunt au début de la dernière annuité et le dernier amortissement.

Cette relation figure à la dernière ligne de la colonne (5) :

$$D_{n-1} - m_n = 0 \Rightarrow P3 : D_{n-1} = m_n$$

Le solde de l'emprunt au début de la dernière annuité est remboursé au travers du dernier amortissement.

P4 : relation entre annuités et amortissements.

Soit deux annuités successives de rangs p et p + 1, avec :

$$a_p = D_{p-1} \times i + m_p \ \ et \ \ a_{p+1} = D_p \times i + m_{p+1}$$

La différence entre ces deux annuités s'écrit :

$$a_{p+1} - a_p = \left(D_p \times i + m_{p+1} \right) - \left(D_{p-1} \times i + m_p \right) = D_p \times i + m_{p+1} - D_{p-1} \times i + m_p$$

La colonne n°5 du tableau d'amortissement indique pour la ligne p l'expression de la dette vivante après paiement de la p$^{\text{ième}}$ annuité :

$$D_P = D_{P-1} - m_P$$

La transposition de cette expression dans le différentiel d'annuités permet d'obtenir :

$$a_{p+1} - a_P = D_{p-1} \times i - m_p \times i + m_{p+1} \times i - D_{p-1} \times i - m_p$$

$$\Rightarrow P4: a_{p+1} - a_P = m_{p+1} - m_p\,(1+i)$$

P5 : dette amortie après paiement de la $p^{ième}$ annuité

Il s'agit de la fraction du capital emprunté, remboursée au terme de la $p^{ième}$ période :

R_p et notée P5 :

$$R_P = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_p = \Sigma m_k \text{ (} de\ k = 1 \text{ à } p \text{)}$$

Cette propriété permet de déterminer la dette vivante au terme de la même période D_p :

P5 bis : $\boldsymbol{D_P = D_0 - R_P}$

Le choix de l'une ou l'autre des modalités de remboursement implique la transformation de ces propriétés pour les adapter au cas considéré.

Emprunts indivis à annuités constantes

Calcul de l'annuité constante

Soit a, l'annuité constante.

Par définition, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$

La propriété P1 devient :

$$D_0 = a[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}]$$

⇒**P6**

$$: D_0 = a \cdot \left[1 - \frac{(1+i)^n}{i}\right]$$

D'où :

$$a = D_0 \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

Les valeurs de $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ sont données par la TFn°5

Exemple :

Un emprunt de 500 000 D, contracté au taux d 12% est remboursé au moyen de 5

$$a = 50000 \left[\frac{0{,}12}{1-(1{,}12)^{-5}}\right] = 138\,704{,}84\ D$$

Loi de progression des amortissements

L'annuité étant constante : $a_{p+1} - a_p = 0$, l'expression P4 devient :

P8: $m_{p+1} - m_p(1+i) = 0 \Rightarrow m_{p_{+1}} = m_p(1+i)$

Dans un système d'annuités constantes, les amortissements forment une progression géométrique croissante de raison $(1+i)$

Cette loi permet de déduire la relation qui s'établit entre les amortissements de rangs p et 1 :

P9 : $\boldsymbol{m_p = m_1(1+i)^{p-1}}$

Reprenons à présent l'expression P2 : $D_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

Compte tenu de la loi d'évolution des amortissements, cette expression peut être réécrite ainsi :

$$D_0 = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + \cdots + m(1+i)^{n-1}$$

$$\Rightarrow D_0 = m_1[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}]$$

⇒**P10 :** $D_0 = m_1 \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

L'expression du premier amortissement est déduite de P10 :

⇒**P11 :** $\boldsymbol{m_1 = D_0 \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]}$

Exemple:

$D_0 = 500\ 000\ DH$; n=5 ; $i = 0{,}12$**.** Remboursement par annuité constantes ; calculer la valeur du premier amortissement

$$m_1 = 50000 \left[\frac{0{,}12}{(1{,}12)^5 - 1}\right] = 78704{,}87\ DH$$

Capital remboursé et dette vivante après paiement de la pième annuité

Considérons de nouveau l'expression générale de la dette amortie après paiement de la pième annuité, P5 :

$$R_p = m_1 + m_1 + \cdots + m_p$$

Exprimée relativement à m1 et compte tenu de la loi de progression des amortissements décrite par P9, Rp devient :

$$R_P = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + \cdots + m_1(1+i)^{p-1}$$

$$\Rightarrow R_p = m_1 \left[\frac{(1+i)^p - 1}{i}\right]$$

La transposition de la formule P11 dans cette égalité, permet d'exprimer Rp à partir du capital emprunté :

$$R_p = D_0 \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \cdot \left[\frac{(1+i)^P - 1}{i}\right]$$

⇒**P12:** $\boldsymbol{R_p = D_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^P - 1}{(1+i)^n - 1}\right]}$

Transposons cette expression dans la formule P5 bis de la dette encore vivante après paiement de la p^ième annuité :

$$D_p = D_0 - R_p = D_0 - D_0 \left[\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}\right]$$

⇒**P13 :**

$$Dp = D_0 \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Exemple:

D_0= 500 000 DH; n= 5; i= 0,12. Remboursement par annuités constantes. Déterminerla dette amortie après paiement de la deuxième annuité et la dette encore vivante après paiement de la troisième annuité.

Dette amortie après paiement de la deuxième annuité :

$R_2 = 500\,000\,[(1,12)^2 -1 / (1,12)^5 - 1\,]=166\,845,32$ DH

Dette encore vivante après paiement de la troisième annuité :

$D_3 = 500\,000\,[(1,12)^5 - (1,12)^3\ / (1,12)^5 - 1\,]= 234418,30$ DH

Présentation du tableau d'amortissement

Exemple :(suite)

Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt indivis à annuités constantes

Années P	Dette en début d'année D_{p-1}(1)	Intérêt de l'année $D_{\ p-1}.i$ (2) = (1). *I*	Amortissement de l'année m_P (3)	Annuités a_p (4) = (2)+(3)	Dette au terme de l'année D_P (5) = (1)-(3)
1	500 000.00	60 000,00	78 704,87	138 704,87	421 295,13
2	421 295,13	50 555,42	88 149,45	138 704,87	333 145,68
3	333 145,68	39 977,48	98 727,39	138 704,87	234 418,30
4	234 418,30	28 130,20	110 574,67	138 704,87	123 843,63
5	123 843,63	14 861,24	123 843,63	138 704,87	0
			500 000,00		

Remarques :

- L'intérêt résulte du produit du taux et de la dette encore vivante au début de l'année. Ainsi, pour la première ligne, 60000 est le produit de 0,12 par 500000.
- L'amortissement d'une année est : soit le produit de l'amortissement précédent par (1+i), raison de la progression géométrique ; soit la différence entre annuité et les intérêts de l'année considérée. L'amortissement de la deuxième ligne 88194,45 résulte ainsi de la multiplication de 78704,87, l'amortissement de la première ligne, par 1,12 ou la différence entre l'annuité 138704,87 et l'intérêt 50555,42.
- Le capital emprunte est totalement amorti au terme de la durée de remboursement (dernière ligne de la colonne 5) ;
- Les valeurs fournies par le tableau d'amortissement confirment les résultats des calculs effectués dans le cadre des exemples précédents :

- m_1 est bien égal à 78704,87 DH ;
- R_2 est bien égal à 166857,32 DH. cette valeur est obtenue par la différenceentre le capital emprunté (500000) et la dette vivante au terme de la deuxième période (333145,68) ;
- D_3 est bien égal à 234418,30 DH. cette valeur figure à la troisième ligne de la colonne 5 du tableau ;

Emprunt indivis à amortissements constants

Dans ce cas, l'amortissement du capital emprunté est répartit de façon égale sur la durée de remboursement de l'emprunt.

Loi de progression des annuités

Désignons par m l'amortissement constant. Par définition :

$a_p = D_{p-1} .i + m$ et $a_{p+1} = D_p .i + m$

Considérons à présent deux annuités successives de rangs p et p+1

$a_p = D_{p-1} .i + m$ et $a_{p+1} = D_p .i + m$

La dette encore vivante après paiement de la $p^{ième}$ annuité a pour expression :

$D_p – D_{p-1} – m$

Transposons cette expression dans celle de a_{p+1} :

$a_{p+1} = (D_{p-1} – m).i + m = D_{p-1} .i – m.i + m = \underline{D_{p-1} .i+m} - m.i$(le terme soulignéreprésente a_p) ;

$\Rightarrow$ **P14 : $a_{p+1} – a_p = -m.i$** ou encore **$a_{p+1} – a_p = - D_0 . i/n$**

Dans un système d'amortissement constants, les annuités ainsi que les intérêts successifs forment une progression arithmétique décroissante de raison : D0 .i/n.

Transformation des propriétés générales

Les propriétés générales énoncées précédemment doivent être adaptés au cas du remboursement par amortissements constants ;

Ainsi, la propriété P2 : $D_0 = \sum m_k$ (de k=1 à n)

Devient $\Rightarrow$ **P15 : D_n =n.m**

Les propriétés relatives aux dettes amorties (R_p) et vivante (Dp) après paiement de la $p^{ième}$ annuité, respectivement P5 et P5 bis deviennent P16 et P17 :

$R_p = p.m$

Or : **$D_p = D_0 - R_p$**

Transposons P15 et P16 dans l'égalité précédente : $D_p = n.m – p.m$

D'où : **$D_p = (n-p).m$**

Présentation du tableau d'amortissement

Exemple :

Déterminer les valeurs de R_2, D_3 et présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt à amortissements constants dont : D_0= 500000 ; n=5 ; i=0,12

Valeur de l'amortissement constant : m=500000/5=100000 DH

Dette amortie après paiement de la deuxième annuité :

R_2 = 2 . 100000 = 200000 DH

Dette encore vivante après paiement de la troisième annuité :

D_3 = (5-3).100000= 200000 DH ;

Présentation du tableau d'amortissement :

Années P	Dette en début d'année D_{p-1}(1)	Intérêt de l'année $D_{p-1}.i$ (2) = (1). *I*	Amortissement de l'année m_P (3)	Annuités a_p (4) = (2)+(3)	Dette au terme de l'année D_P (5) = (1)-(3)
1	500000,00	60000,00	100000,00	160000,00	400000,00
2	400000,00	48000,00	100000,00	148000,00	300000,00
3	300000,00	36000,00	100000,00	136000,00	200000,00
4	200000,00	24000,00	100000,00	124000,00	100000,00
5	100000,00	12000,00	100000,00	112000,00	0,00
			500000,00		

Remarques :

L'intérêt résulte du même calcul que celui opéré dans le cas précédent de l'empruntà annuités constantes. Les valeurs successives sont obtenues retranchant (D_0 .i/n) dela valeur qui précède. Ainsi, l'intérêt de la deuxième année, 48 000, correspond à ladifférence entre 60000 l'intérêt de la première période et la raison de la progressionarithmétique : D_0 .i/n =12000.

Les valeurs fournies par le tableau d'amortissement confirment celles obtenues par le calcul direct pour R_2 et D_3.

Emprunt indivis remboursable in fine

Rappelons que cette modalité de remboursement comporte deux variantes :

- La première, qualifiée de relative, permet au débiteur de n'acquitter que l'intérêt pendant (n-1) périodes. La nième et dernière annuité intègre à la foisle paiement de l'intérêt et la restitution de la somme empruntée ;
- La seconde, qualifiée d'absolue, exonère le débiteur de tout paiement pendant les (n-1) périodes. La dernière et unique annuité, comporte à la fois le remboursement du capital emprunté et le paiement des intérêts.

Remboursement *in fine* : variante relative

Désignons par m le montant constant des versements capitalisés au taux i' et destinés à assurer le remboursement à la dernière période du capital D0 emprunté àl'époque zéro.La valeur de m s'obtient à partir de la relation suivante :

D_0= m**[** $(1+i')^n - 1$ /i'**]**

⇒P18 : **m= D0.[i' /$(1+i')^n - 1$]**

La charge périodique effective comprend à la fois :

- le paiement des intérêts, destiné au prêteur ;
- le versement des termes du fonds d'amortissement, destiné à l'organisme *decapitalisation.*

Soit $a_1,a_2,\ldots a_n$ les annuités effectives.

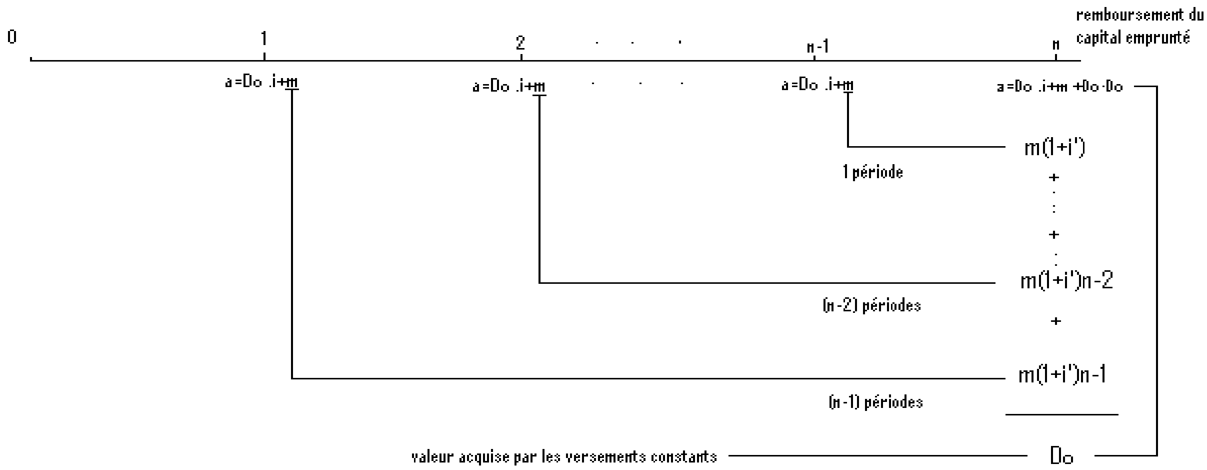
Par définition : $a_1=a_2=\ldots=a_n= D_0.\ i+m$

⇒P19 : **$a=D_0\ .i+m$**

transposons P18 dans cette égalité. L'annuité effective s'exprime également ainsi :

⇒P20 : **$a=D_0\ [i+\ \ (i'/\ (1+i')^n - 1)]$**

Le graphe ci-dessus reprend les relations établies précédemment :



Remarque : au terme de la nième période, la valeur acquise par les n versements constants de montant $m(D_0)$ compense exactement le remboursement du prêt, de sorte que la charge effective ($D_0.i+m$) de cette dernière période demeure identique àcelle des périodes précédentes.

Remboursement in fine : variante absolue

Cette modalité exclut tout paiement d'intérêt pendant les périodes qui précèdent la dernière. Au terme de celle-ci, le débiteur paie à la fois les intérêts et le montant du capital emprunté.

Les versements de la banque (m), capitalisés au taux de i', sont destinés à assurer lepaiement, au terme de la dernière période, d'un montant égal à la valeur acquise (autaux i) par le capital prêté. **Ces versements constituent, à eux seuls, la charge effective supportée par le débiteur à chaque période**.

Ces annuités effectives et constantes ont donc pour valeur : $a_1=a_2=\ldots=a_n=m$

⇒P21 : **$a=m$**

La valeur de m étant : $D_0\ (1+i)^n = m\ [(1+i')^n\text{-}1/i']$

⇒P22: **$m= D_0\ \ (1+i)^n\ [i'/\ (1+i')^n\text{-}1]$**

Cas où i'=i

Si le débiteur constitue le fonds d'amortissement à un taux i' égal au taux i auquelil emprunte, l'annuité effectivement supportée est alors identique, quelle que soit lavariante.

Remplaçons i' par i dans l'expression de l'annuité.

- Variante relative :

$$a=D_0. [i + (i/ (1+i)^n – 1]$$

$\Rightarrow$P20 bis: **$a= D_0. [i/1-(1+i)^{-n}]$**

- Variante absolue :

$$a= D_0 (1+i)^n [i/ (1+i)^n-1]$$

$\Rightarrow$P22 bis: **$a= D_0 [i/ 1-(1+i)^{-n}]$**

Cette annuité est identique à celle d'un emprunt amortissable par annuités constantes. La destination de l'annuité effective n'est cependant pas exclusive, à l'instar des emprunts à annuités constantes, mais double :

- Le prêteur, pour l'intérêt,
- L'organisme financier, pour les versements constitutifs du fonds d'amortissement.

Exemple :

Un emprunt de 500 000 DH contracté au taux de 12% est remboursé par un versement unique au terme de la cinquième année. Pour faire face à ce paiement, le débiteur décide de placer chaque année une somme rémunérée au taux de 10% ;

- Déterminer le montant constant de ces versements annuels;
- Calculer la charge annuelle effective engendrée par cet emprunt, sachant que le décideur est tenu de verser l'intérêt au terme de chaque année ;
- Quelle serait cette charge annuelle si les placements étaient rémunérés à 12%.

Montant constant des versements annuels :

$$m= 500\ 000[0,10 / (1,10)^5 -1]=81898,74 \text{ DH}$$

Charge annuelle effective :

Cette charge résulte des intérêts versés au préteur ($D_0.i$) et des versements destinésà constituer le fonds d'amortissement (m). Il s'agit donc de déterminer l'annuité correspondante à la variante relative.

$$m=500\ 000[0,12 +0,10 / (1,10)^5 -1]= 141\ 898,74 \text{ DH}$$

La fraction destinée au prêteur est égale à :

$$D_0.i = 500\ 000.\ 0,12 = 60\ 000 \text{ DH ou a-m}= 141\ 898,74 – 81\ 898,74= 60\ 000 \text{ DH}$$

Charge annuelle effective si i'= 0,12

Dans ce cas i'=i. l'annuité effective s'obtient directement à partir de :

$$a= 500\ 000\ [0,12/1- (1,12)^{-5}]=138\ 704,87 \text{ DH}$$

La charge annuelle effective est moins importante qu'elle ne l'était dans le casprécédent où $i'\neq i$. ce résultat s'explique par le rythme de capitalisation. Celui-ci étant plus élevé que dans le cas initial (12% contre 10%), les versements destinés àla constitution du fonds d'amortissements sont nécessairement moins importants :

$m = a - D_0.i$ = 138 704, 87 – (500 000. 0, 12) = 78 704, 87 DH

Et donc: 78 704,87 < 81 898,74 DH